1 Osnovna načela

Funkcija je preslikava $f:\ X \to Y$, kjer $f \subseteq X \times Y \ \wedge\ \forall x \in X\ \exists!\ y \in Y:\ (x,y) \in f$. Funkcija f je **injektivna**, če $\forall a,b \in X:\ f(a) = f(b) \implies a = b$; **surjektivna**, če $\forall y \in Y\ \exists x \in X:\ f(x) = y$; **bijektivna**, če injektivna in surjektivna. Funkcija $f:\ X \to X$ je **idempotentna**, če $f \circ f = f$ oz. če $\forall y \in f(X)$ velja $f(y) = y$.
Množica preslikav $X: \to Y$ je Y^X, $\left|Y^X\right| = |Y|^{|X|}$.
Permutacija je bijekcija $f:\ X \to X$. S_n je množica $\forall$ permutacij [n], $|S_n| = n!$. Število cikličnih permutacij v $S_n = (n-1)!$.
Dirichletovo načelo: (1) $|X| > |Y| \implies \neg\exists$ injekcija $f:\ X \to Y$. (2) Imamo n kroglic, ki jih dajemo v m škatel tako, da v vsaki čim manj kroglic: $r \in \mathbb{N}:\ n > r \cdot m \implies \exists$ škatla z $\geq r+1$ kroglicami.
Načelo vsote, produkta: $A_1,\ldots,A_n$ množice:

$$A_i \cap A_j = \emptyset\ i \neq j \implies |\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i| \quad \left|\prod_{i=1}^n A_i\right| = \prod_{i=1}^n |A_i|$$

Asimptotska enakost: $a_n \sim b_n \iff lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.
Stirlingova formula: $n! \sim \sqrt{2\pi^n} \cdot (\frac{n}{e})^n$

$$k^{\overline{n}} = k \cdot (k+1) \cdot \ldots \cdot (k+n-1) \quad k^{\underline{n}} = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1)$$

(T1) Idempotentnih funkcij $f:\ [n] \to [n]$ je $\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \cdot i^{n-i}$.

2 Podmnožice in Načrti

2.1 Binomski koeficienti

Binomski koeficient: $n,k \in \mathbb{N}_0$, A množica:

$$\binom{A}{k} := \{B \subseteq A:\ |B| = k\} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} := \left|\binom{[n]}{k}\right|$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \begin{cases} \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!};\ 0 \leq k \leq n \\ 0;\ \text{sicer} \end{cases}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Binomski izrek: Naj bo $(R,+,\cdot)$ komutativen kolobar in $a,b \in R$, potem:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Kroneckerjeva delta: $\delta_{ij} := \begin{cases} 1:\ i = j \\ 0:\ i \neq j \end{cases}$ $\quad \delta_{n0} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0^n$.

2.2 Izbori

Med **n** kroglicami jih **k** izbiramo:

Vrstni red (pomemben)	Ponavljanje (dovoljeno)	
	JA	NE
JA - variacije	n^k	$n^{\underline{k}}$
NE - kombinacije	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

2.3 Kompozicije

Kompozicija števila $n \in \mathbb{N}$ je $(\lambda_1,\ldots,\lambda_l)$, če $\lambda_i \geq 1$ in $\lambda_1 + \cdots + \lambda_l = n$. Če $\lambda_i \geq 0$, je kompozicija **šibka**. λ_i člen, l dolžina in n velikost kompozicije.
Število kompozicij n je 2^{n-1}, n dolžine k pa $\binom{n-1}{k-1}$ za $n,k \geq 1$.
Število šibkih kompozicij n dolžine k je $\binom{n+k-1}{n}$ za $n,k \geq 1$.

2.4 Načelo vključitev in izključitev

$A_1,\ldots,A_n \in A$ množice, $I \subseteq [n]$ in $A_I = \cap_{i\in I} A_i$:

$$|\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{I\subseteq[n], I\neq\emptyset} (-1)^{|I|-1} \cdot |A_I|$$

$$|\cap_{i=1}^n A_i^c| = \sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{|I|} \cdot |A_I|$$

Eulerjeva funkcija:

$$\Phi(n) = |\{i \in [n]:\ \gcd(n,i) = 1\}| = n \cdot \prod_{p|n}(1 - \frac{1}{p})$$

2.5 Multinomski koeficient

Multimnožica $M = \{1^{a_1},\ldots,n^{a_n}\}$je neurejen seznam objektov s ponavljanjem.
Multinomski koeficient je $\binom{m}{a_1,\ldots,a_n} = \frac{m!}{a_1!\ldots a_n!}$
Število permutacij multimnožice: $\binom{a_1+\cdots+a_n}{a_1,\ldots,a_n}$
Multinomski izrek:

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{i_1+\cdots+i_k=n,\ i_j\geq 0} \binom{n}{i_1,\ldots,i_k} \cdot x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_K}$$

2.6 Načrti in t-načrti

Načrt je $B = \{B_1,\ldots,B_b\}$ s parametri (v,k,λ), če velja: $B_i \subseteq [v]$, $|B_1| = \cdots = |B_b| = k$ in $\forall i \in [v]\ \exists$ natanko λ indeksov j, da velja $i \in B_j$.

$$\text{Načrt s parametri } (v,k,\lambda)\ \exists \iff k \mid v \cdot \lambda\ \wedge\ \lambda \leq \binom{v-1}{k-1}$$

T-načrt je $B = \{B_1,\ldots,B_b\}$ s parametri (v,k,λ_t), če velja: $B_i \subseteq [v]$, $|B_1| = \cdots = |B_b| = k$ in $\forall A \subseteq [v]$, $|A| = t$ velja $A \subseteq B_j$ za natanko λ_t indeksov j.

$$B \text{ t-načrt s parametri } (v,k,\lambda_t) \implies B \text{ (t-1)-načrt s parametri } (v,k,\lambda_{t-1})$$

$$\lambda_{t-1} = \lambda_t \cdot \frac{v-t+1}{k-t+1}$$

Steinerjev trojček je 2-načrt s parametri $(v,3,1)$.
(T1) B 2-načrt s parametri $(v,k,\lambda_2) \implies k\cdot(k-1) \mid \lambda_2 \cdot v \cdot (v-1)$.
(T2) Steinerjev trojček $\exists$ le ko je $v \equiv 1(\text{mod } 6)$ ali $v \equiv 3(\text{mod } 6)$.
(T3) Naj velja, da so $S+i$; $i \in \mathbb{Z}_n$ $\forall$ med seboj različni $\implies \{S+i;\ i \in \mathbb{Z}_n\}$ načrt s parametri $(n, |S|, |S|)$.

3 Permutacije, Razdelitve, Razčlenitve

3.1 Sterlingova števila 1. vrste

Sterlingovo število 1. vrste je število permutacij v S_n s k cikli, $C(n,k)$.

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + (n-1) \cdot C(n-1,k)$$

$$\sum_k C(n,k) \cdot x^k = x^{\overline{n}}$$

$$\sum_k (-1)^{n-k} \cdot C(n,k) \cdot x^k = x^{\underline{n}}$$

3.2 Sterlingova števila 2. vrste in Bellova števila

Razdelitev množice A je $\{B_1,\ldots,B_k\}$ da velja: (1) $B_i \neq \emptyset\ \forall i \in [k]$ (2) $B_i \cap B_j = \emptyset\ i \neq j$ (3) $\cup_{i=1}^k B_i = A$.
Sterlingovo število 2. vrste $S(n,k)$ je število razdelitev [n] s k bloki.
Bellovo število $B(n)$ je število razdelitev [n].

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$$

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\dot{B}(k)$$

$$B(n) = \sum_{k=0}^n S(n,k)$$

$$\sum_k S(n,k) \cdot x^{\underline{k}} = x^n$$

$$\sum_k (-1)^{n-k} \cdot S(n,k) \cdot x^{\overline{k}} = x^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot S(k,m) = S(n+1,m+1)$$

Število surjekcij [n] $\to$ [k] je $k! \cdot S(n,k)$.

$$S(n,k) = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j} \cdot j^n}{j!\dot{(}k-j)!}$$

Tabela **Bellovih** in **Sterlingovih števil 2. vrste**:

n\k	0	1	2	3	4	5	B(n)
0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
2	0	1	1	0	0	0	2
3	0	1	3	1	0	0	5
4	0	1	7	6	1	0	15
5	0	1	15	25	10	1	52

3.3 Lahova števila

Lahovo število $L(n,k)$ je število razdelitev [n] na k linearno urejenih blokov.

$$L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n+k-1) \cdot L(n-1,k)$$

$$L(n,k) = \frac{n!}{k!} \cdot \binom{n-1}{k-1} \quad n,k \geq 1$$

$$\sum_k L(n,k) \cdot x^{\underline{k}} = x^{\overline{n}}$$

$$\sum_k (-1)^{n-k} \cdot L(n,k) \cdot x^{\overline{k}} = x^{\underline{n}}$$

Opomba: $S(n,k) \leq C(n,k) \leq L(n,k)$.

3.4 Razčlenitve

Razčlenitev števila $n \in \mathbb{N}$ je $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, kjer $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_l$ in $\lambda_1 + \cdots + \lambda_l = n$. λ_i je člen, $l = l(\lambda)$ dolžina in $n = |\lambda|$ velikost razčlenitve.
Konjugirana razčlenitev λ' ima diagram, ki je transponiran diagram λ, $\lambda'_j = \max\{i : \lambda_i \geq j\} = |\{i : \lambda_i \geq \lambda_j\}|$, $\lambda'' = \lambda$. λ je **sebiadjungirana**, če $\lambda' = \lambda$.
Število razčlenitev števila n poljubne dolžine je $P(n)$, dolžine k $P_k(n)$, dolžine $\leq$ k $\overline{P}_k(n)$:

$$P_k(n) = \overline{P}_k(n-k)$$

$$P_k(n) = P_{k-1}(n-1) + P_k(n-k)$$

$$\overline{P}_k(n) = \overline{P}_k(n-k) + \overline{P}_{k-1}(n)$$

$$P_n(2n) = P(n)$$

Eulerjev 5-kotniški izrek:

$$P(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (P(n - \frac{k \cdot (3k-1)}{2}) + P(n - \frac{k \cdot (3k+1)}{2}))$$

(T1) Število sebiadjungiranih razčlenitev n = številu razčlenitev na različne lihe člene.

3.5 Dvanajstera pota

Injektivna razporeditev: v vsaki škatli je največ ena kroglica
Surjektivna razporeditev: v vsaki škatli je vsaj ena kroglica

ß Razporejamo **n** kroglic v **k** škatel:

		# možnosti		
n	k	$\forall$	injektivne	surjektivne
L	L	k^n	$k^{\underline{n}}$	$k! \cdot S(n,k)$
N	L	$\binom{n+k-1}{k-1}$	$\binom{k}{n}$	$\binom{n-1}{k-1}$
L	N	$\sum_{i \leq k} S(n,i)$	1: $n \leq k$ | 0: $n > k$	$S(n,k)$
N	N	$\overline{P}_k(n)$	1: $n \leq k$ | 0: $n > k$	$P_k(n)$

L - ločimo kroglice/škatle, N - ne ločimo kroglice/škatle