

Teorija Analize 1 — IŠRM 2023/24

ANTON LUKA ŠIJANEC

15. avgust 2024

Povzetek

Povzeto po zapiskih s predavanj profesorja Oliverja Dragičevića.

Kazalo

1 Števila	2
1.1 Realna števila	2
1.1.1 Lastnosti seštevanja	2
1.1.2 Lastnosti množenja	2
1.1.3 Skupne lastnosti v \mathbb{R}	3
1.1.4 Intervali	3
1.2 Temeljne številske podmnožice	3
1.2.1 Naravna števila \mathbb{N}	3
1.2.2 Cela števila \mathbb{Z}	3
1.2.3 Racionalna števila \mathbb{Q}	4
1.3 Omejenost množic	4
1.4 Decimalni zapis	4
1.5 Kompleksna števila	4
1.5.1 Deljenje v \mathbb{C}	5
1.5.2 Lastnosti v \mathbb{C}	5
2 Zaporedja	5
2.1 Posebni tipi zaporedij	5
2.2 Limita zaporedja	6
2.3 Eulerjevo število	9
2.4 Stekališča	11
2.5 Limes superior in limes inferior	12
2.6 Cauchyjev pogoj	13
3 Številske vrste	13
3.1 Konvergenčni kriteriji	14
3.2 Alternirajoče vrste	15
3.3 Absolutno konvergentne vrste	16
3.4 Pogojno konvergentne vrste	16
4 Funkcijske vrste	16
5 Zveznost	18
5.1 Zvezne funkcije na kompaktnih množicah	21
5.2 Enakomerna zveznost	22
6 Odvod	23
6.1 Diferencial	27
6.2 Konveksnost in konkavnost	30
6.3 Ekstremi funkcij ene spremenljivke	31
6.4 L'Hopitalovo pravilo	31

8 Integrali

8.1	Iskanje primitivne funkcije	37
8.2	Izlimitirani integrali	37
8.3	Uporaba integrala	38

1 Števila

Definicija. Množica je matematični objekt, ki predstavlja skupino elementov. Če element a pripada množici A , pišemo $a \in A$, sicer pa $a \notin A$. Množica B je podmnožica množice A , pišemo $B \subset A$, če $\forall b \in B : b \in A$. Presek B in C označimo $B \cap C := \{x; x \in B \wedge x \in C\}$. Unijo B in C označimo $B \cup C := \{x; x \in B \vee x \in C\}$. Razliko/komplement „ B manj/brez C “ označimo $B \setminus C := \{x; x \in B \wedge x \notin C\}$.

1.1 Realna števila

Množico realnih števil označimo \mathbb{R} . V njej obstajata binarni operaciji seštevanje $a + b$ in množenje $a \cdot b$.

1.1.1 Lastnosti seštevanja

Aksiom 1. Komutativnost: $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$.

Aksiom 2. Asociativnost: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a + (b + c) = (a + b) + c$, torej je $a + \dots + z$ dobro definiran izraz.

Aksiom 3. Obstoj enote: $\exists 0 \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$.

Aksiom 4. Obstoj inverzov: $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} \ni a + b = 0$.

Trditev. Inverz je enoličen.

Dokaz. Naj bo $a, b, c \in \mathbb{R}$ in $a + b = 0$ in $a + c = 0$. Tedaj $b = b + 0 = b + a + c = 0 + c = c$. □

Posledica. Inverz je funkcija in aditivni inverz a označimo z $-a$. Pri zapisu $a + (-b)$ običajno $+$ izpustimo in pišemo $a - b$, čemur pravimo odštevanje b od a .

Trditev. $\forall a \in \mathbb{R} : a = -(-a)$.

Dokaz. Naj bo $b = -a$ in $c = -b = -(-a)$. Tedaj velja $c - a = c + b = -(-a) - a = 0$ in $a = 0 + a = c - a + a = c + (-a) + a = c + 0 = c = -(-a)$. □

Trditev. $-(b + c) = -b - c$

Dokaz. Velja $b + c + (-b - c) = b + c + ((-b) + (-c)) = b + (-b) + c + (-c) = 0$, torej je $b + c$ inverz od $(-b - c)$, torej je $-(b + c) = -b - c$. □

1.1.2 Lastnosti množenja

Aksiom 5. Komutativnost: $\forall a, b \in \mathbb{R} : ab = ba$.

Aksiom 6. Asociativnost: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a(bc) = (ab)c$, torej je $a \cdot \dots \cdot z$ dobro definiran izraz.

Aksiom 7. Obstoj enote: $\exists 1 \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} : a1 = a$.

Aksiom 8. Obstoj inverzov: $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni ab = 1$

Trditev. Inverz je enoličen.

Dokaz. Naj bo $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in $ab = 1$ in $ac = 1$. Tedaj $b = b1 = bac = 1c = c$. □

Posledica. Inverz je funkcija in multiplikativni inverz a označimo z a^{-1} . Pri zapisu $a \cdot b^{-1}$ lahko \cdot izpustimo in pišemo a/b , čemur pravimo deljenje a z b za neničeln b .

1.1.3 Skupne lastnosti v \mathbb{R}

Aksiom 9. $1 \neq 0$

Aksiom 10. *Distributivnost:* $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b)c = ac + bc$

Urejenost \mathbb{R} Realna števila delimo na pozitivna $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$, negativna $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R}; x < 0\}$ in ničlo 0. Če je $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, pišemo $x \geq 0$, če je $x \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}$, pišemo $x \leq 0$.

Aksiom 11. Če je $a \neq 0$, je natanko eno izmed $\{a, -a\}$ pozitivno, imenujemo ga absolutna vrednost a (pišemo $|a|$), in natanko eno negativno, pišemo $-|a|$.

Definicija. $|0| = 0$.

Definicija. Za $a, b \in \mathbb{R}$ se $|a - b|$ imenuje razdalja.

Aksiom 12. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a, b > 0 \Rightarrow (a + b > 0) \wedge (ab > 0)$.

Definicija. Za $a, b \in \mathbb{R}$: a je večje od b , oznaka $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$. a je manjše od b , oznaka $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$. Podobno \leq in \geq .

Trditev. Trikotniška neenakost. $\forall a, b \in \mathbb{R} : ||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$.

Dokaz. Dokažimo desni neenačaj. Vemo $ab \leq |ab|$ in $|a| = \sqrt{a^2}$. Naj bo $a^2 + 2ab + b^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$, torej $(a + b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$, korenimo: $|a + b| \leq |a| + |b|$. \square

1.1.4 Intervali

Definicija. Naj bo $a < b$. Označimo odprti interval $(a, b) := \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$, zaprti $[a, b] := \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$, polodprti $(a, b] := \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ in podobno $[a, b)$. $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$ in podobno $[a, \infty)$.

1.2 Temeljne številske podmnožice

1.2.1 Naravna števila \mathbb{N}

Definicija. $\mathbb{N} := \{1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1, \dots\}$

Matematična indukcija Če je $A \subseteq \mathbb{N}$ in velja $1 \in A$ (baza) in $a \in A \Rightarrow a + 1 \in A$ (korak), tedaj $A = \mathbb{N}$.

Trditev. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dokaz. $A := \{n \in \mathbb{N}; \text{velja trditev za } n\}$. Dokažimo $A = \mathbb{N}$.

- Baza: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$.
- Korak: Predpostavimo $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Prištejmo $n + 1$:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

\square

1.2.2 Cela števila \mathbb{Z}

Množica \mathbb{N} je zaprta za seštevanje in množenje, torej $\forall a, b \in \mathbb{N} : a + b \in \mathbb{N} \wedge ab \in \mathbb{N}$, ni pa zaprta za odštevanje, ker recimo $5 - 3 \notin \mathbb{N}$. Zapremo jo za odštevanje in dobimo množico \mathbb{Z} .

Definicija. $\mathbb{Z} := \{a - b; b, a \in \mathbb{N}\}$

1.2.3 Racionalna števila \mathbb{Q}

Najmanjša podmnožica \mathbb{R} , ki vsebuje \mathbb{Z} in je zaprta za deljenje, je \mathbb{Q} .

Definicija. $\mathbb{Q} := \{a/b; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.

Velja $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Trditev. Za $a \in \mathbb{Q}$, $b \notin \mathbb{Q}$ velja $a + b \notin \mathbb{Q}$ in $a \neq 0 \Rightarrow ab \notin \mathbb{Q}$.

Dokaz. PDDRAA $a + b \in \mathbb{Q}$. Tedaj $a + b - a \in \mathbb{Q}$, tedaj $b \in \mathbb{Q}$, kar je \times . PDDRAA $ab \in \mathbb{Q}$. Tedaj $\frac{ab}{a} \in \mathbb{Q}$, tedaj $b \in \mathbb{Q}$, kar je \times . \square

1.3 Omejenost množic

Definicija. Naj bo $A \subset \mathbb{R}$. A je navzgor omejena $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \leq m$. Takemu m pravimo zgornja meja. Najmanjši zgornji meji A pravimo supremum ali natančna zgornja meja množice A , označimo $\sup A$. Če je zgornja meja A (m) element A , je maksimum množice A , označimo $m = \max A$. Če množica ni navzgor omejena, pišemo $\sup A = \infty$.

Če $s = \sup A \in \mathbb{R}$, mora veljati $\forall a \in A : a \leq s$ in $\forall \varepsilon > 0 \exists b \in A \ni b > s - \varepsilon$, torej za vsak neničeln ε $s - \varepsilon$ ni več natančna zgornja meja za A .

Definicija. Naj bo $A \subset \mathbb{R}$. A je navzdol omejena $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \geq m$. Takemu m pravimo spodnja meja. Največji spodnji meji A pravimo infimum ali natančna spodnja meja množice A , označimo $\inf A$. Če je spodnja meja A (m) element A , je minimum množice A , označimo $m = \min A$. Če množica ni navzdol omejena, pišemo $\inf A = -\infty$.

Definicija. Množica $A \subset \mathbb{R}$ je omejena, če je hkrati navzgor in navzdol omejena.

Aksiom 13. *Dedekind.* Vsaka navzgor omejena množica v \mathbb{R} ima natančno zgornjo mejo v \mathbb{R} .

Pripomba. Za \mathbb{Q} aksiom 13 ne velja. Če $B \subset \mathbb{Q}$, se lahko zgodi, da $\sup B \notin \mathbb{Q}$. Primer: $B := \{q \in \mathbb{Q}; q^2 \leq 2\}$. $\sup B = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Zgled.

1.4 Decimalni zapis

Definicija. $\forall x \in \mathbb{R}^+ \exists! m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, d_1, d_2, \dots \in \{0..9\}$, ki število natančno določajo. Pišemo $x = m, d_1 d_2 \dots$. Natančno določitev mislimo v smislu:

- $m \leq x < m + 1$ — s tem se izognemo dvojnemu zapisu $1 = 0, \bar{9}$ in $1 = 1, \bar{0}$.
- $[m, m + 1)$ razdelimo na 10 enako dolgih polodprtih intervalov I_0, \dots, I_9 . x leži na natanko enem izmed njih, indeks njega je d_1 . Nadaljujemo tako, da I_{d_1} razdelimo zopet na 10 delov itd.

Števila $x \in \mathbb{R}^-$ pišemo tako, da zapišemo decimalni zapis števila $-x$ in predenj zapišemo $-$.

Če se decimalke v zaporedju $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ponavljajo, uporabimo periodični zapis, denimo $5,01\overline{763} \in \mathbb{Q}$.

1.5 Kompleksna števila

Definicija. Vpeljimo število i z lastnostjo $i^2 = -1$, da je i rešitev enačbe $x^2 + 1 = 0$.

Trditev. $i \notin \mathbb{R}$

Dokaz. Sicer bi veljalo $i^2 \geq 0$, kar po definiciji ne velja. \square

Definicija. Kompleksna števila so $\mathbb{C} := \{a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}$. bi je še nedefinirano, zato za kompleksna števila definirano seštevanje in množenje za $z = a + bi$ in $w = c + di$:

- $z + w := (a + c) + (b + d)i$
- $zw := (a + bi)(c + di) = ac + adi + bic + bidi = ac + adi + bic - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Definiramo še konjugirano vrednost $z \in \mathbb{C}$: $\bar{z} := a - bi$ in označimo $|z|^2 = z\bar{z}$.

Trditev. $z\bar{z} = a^2 + b^2 \geq 0$ za $z = a + bi$.

Dokaz. $(a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - bia - bibi = a^2 + b^2$. □

Velja, da je $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ v smislu identifikacije \mathbb{R} z množico \mathbb{C} : $\mathbb{R} = \{a + 0i; a \in \mathbb{R}\}$, torej smo \mathbb{R} razširili v \mathbb{C} , kjer ima vsak polinom vedno rešitev.

1.5.1 Deljenje v \mathbb{C}

Za $w, z \in \mathbb{C}, w \neq 0$ iščemo $x \in \mathbb{C} \ni wx = z$. Ločimo dva primera:

- $w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: definiramo $x = \frac{z}{w} := \frac{a}{w} + \frac{b}{w}i$
- $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (splošno): $wx = z \xrightarrow{/\cdot\bar{w}} w\bar{w}x = z\bar{w} \Rightarrow |w|^2 x = z\bar{w} \Rightarrow x = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$, $z|w|^2$ pa znamo deliti, ker je realen.

1.5.2 Lastnosti v \mathbb{C}

+ in \cdot sta komutativni, asociativni, distributivni, 0 je aditivna enota, 1 je multiplikativna.

Definicija. Za $z = a + bi$ vpeljemo $\Re z = a$ in $\Im z = b$.

Pripomba. Opazimo $\Re z = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\Im z = \frac{z-\bar{z}}{2}$.

Pripomba. \mathbb{C} si lahko predstavljamo kot urejene pare; $a + bi$ ustreza paru (a, b) . Tako \mathbb{C} enačimo/identificiramo z $\mathbb{R}^2 := \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$, s čimer dobimo geometrično predstavitev \mathbb{C} kot vektorje v \mathbb{R}^2 .

Definicija. Za $z = a + bi$, predstavljen z vektorjem s komponentami (a, b) , velja $a = |z| \cos \varphi$ in $b = |z| \sin \varphi$. Kotu φ pravimo argument kompleksnega števila z , oznaka $\arg z$.

Posledica. $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Velja¹ $(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi) = \cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)$, zato lahko pišemo $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Množenje kompleksnih števil $z = |z|e^{i\varphi}$ in $w = |w|e^{i\psi}$ vrne število zw , za katero velja:

- $|zw| = |z||w|$
- $\arg zw = \arg z + \arg w$ (do periode 2π natančno)

2 Zaporedja

Definicija. Funkcija $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ se imenuje realno zaporedje, oznaka $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. a_n je funkcijska vrednost pri n .

Zgled. $a_n = n: 1, 2, 3, \dots$; $a_n = (-1)^n n^2: -1, 4, -9, 16, -25, \dots$; $a_n = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$

Zaporedje lahko podamo rekurzivno. Podamo prvi člen ali nekaj prvih členov in pravilo, kako iz prejšnjih členov dobiti naslednje.

Zgled. $a_1 = 0, a_{n+1} = a_n + n$ da zaporedje $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$. $a_0 = 0, a_{n+1} = \sqrt{b + a_n}$ da zaporedje $0, \sqrt{b}, \sqrt{b + \sqrt{b}}, \sqrt{b + \sqrt{b + \sqrt{b}}}, \dots$.
Fibonaccijevo zaporedje: $a_1 = a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ da zaporedje $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$

2.1 Posebni tipi zaporedij

Definicija. Zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je aritmetično, če $\exists k \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} - a_n = k$. Tedaj $a_{n+1} = a_n + k = a_1 + nd$.

Definicija. Zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je geometrično, če $\exists \lambda \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n \lambda$. Tedaj $a_n = \lambda^{n-1} a_1$.

Definicija. Zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je navzdol oz. navzgor omejeno, če je množica vseh členov tega zaporedja navzgor oz. navzdol omejena (glej 1.3). Podobno z množico členov definiramo supremum, infimum, maksimum in infimum zaporedja.

Zaporedje je naraščajoče, če $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$, padajoče, če $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$, strogo naraščajoče, če $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$, strogo padajoče podobno, monotono, če je naraščajoče ali padajoče in strogo monotono, če je strogo naraščajoče ali strogo padajoče.

¹TODO DOPISATI ZAKAJ (v bistvu še jaz ne vem). ne razumem.

2.2 Limita zaporedja

Definicija. Množica $U \subseteq \mathbb{R}$ je odprta, če $\forall u \in U \exists r > 0 \ni (u - r, u + r) \subseteq U$.

Definicija. Množica $U \subseteq \mathbb{R}$ je zaprta, če je $U^c := \mathbb{R} \setminus U$ odprta.

Trditev. Odprt interval je odprta množica.

Dokaz. Za poljubna $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$, naj bo $u \in (a, b)$ poljuben. Ustrezen r je $\min\{|r - a|, |r - b|\}$, da je $(u - r, u + r) \subseteq U$. \square

Trditev. Zaprt interval je zaprt.

Dokaz. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$ poljubna in $b > a$. Dokazujemo, da je $[a, b]$ zaprt, torej da je $[a, b]^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ odprta množica. Za poljuben $u \in [a, b]^c$ velja, da je bodisi $\in (-\infty, a)$ bodisi (b, ∞) , kajti $(-\infty, a) \cap (b, \infty) = \emptyset$. Po prejšnji trditvi v obeh primerih velja $\exists r > 0 \ni (u - r, u + r) \subseteq U$, torej je $[a, b]^c$ res odprta, torej je $[a, b]$ res zaprta. \square

Definicija. Množica B je okolica točke $t \in \mathbb{R}$, če vsebuje kakšno odprto množico U , ki vsebuje t , torej $t \in U^{\text{odp.}} \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$.

Definicija. $L \in \mathbb{R}$ je limita zaporedja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$. ZDB $\forall V$ okolica $L \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in V$, pravimo, da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira k L in pišemo $L := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ali drugače $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$. Če zaporedje ima limito, pravimo, da je konvergentno, sicer je divergentno.

Trditev. Konvergentno zaporedje v \mathbb{R} ima natanko eno limito.

Dokaz. Naj bosta J in L limiti zaporedja $(a_n)_{n \rightarrow \infty}$. Torej² po definiciji $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon \wedge |a_n - J| < \varepsilon$. Velja torej $\forall \varepsilon > 0 : |J - L| < \varepsilon$. PDDRAA $J \neq L$. Tedaj $|J - L| \neq 0$, naj bo $|J - L| = k$. Tedaj $\exists \varepsilon > 0 : |J - L| \not< \varepsilon$, ustrezen ε je na primer $\frac{|J-L|}{2}$. \square

Trditev. Konvergentno zaporedje v \mathbb{R} je omejeno.

Dokaz. Naj bo $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Znotraj intervala $(L - 1, L + 1)$ so vsi členi zaporedja razen končno mnogo $(\{a_1, \dots, a_{n_0}\})$. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je unija dveh omejenih množic; $(L - 1, L + 1)$ in $\{a_1, \dots, a_{n_0}\}$, zato je tudi sama omejena. \square

Izrek. Naj bosta $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentni zaporedji v \mathbb{R} . Tedaj so tudi $(a_n * b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentna in velja $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n * b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n * \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ za $*$ $\in \{+, -, \cdot\}$. Če je $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, isto velja tudi za deljenje.

Dokaz. Naj bo $a_n \rightarrow A$ in $b_n \rightarrow B$ oziroma $\forall \varepsilon > 0 \exists n_1, n_2 \ni (n > n_1 \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon) \wedge (n > n_2 \Rightarrow |b_n - B| < \varepsilon)$, torej $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = \max\{n_1, n_2\} \ni n > n_0 \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon \wedge |b_n - B| < \varepsilon$. Dokažimo za vse operacije:

+ Po predpostavki velja $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \ni n > n_0 \Rightarrow |a_n - A| + |a_n - B| < 2\varepsilon$. Oglejmo si sedaj

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B|$$

in uporabimo še prejšnjo trditev, torej $\forall 2\varepsilon \exists n_0 \ni (a_n + b_n) - (A + B) \leq 2\varepsilon$, s čimer dokažemo $(a_n + b_n) \rightarrow A + B$.

– Oglejmo si

$$|(a_n - b_n) - (A - B)| = |a_n - b_n - A + B| = |(a_n - A) + (-(b_n - B))| \leq |a_n - A| + |b_n - B|$$

in nato kot zgoraj.

²Ko trdimo, da obstaja n_0 , še ne vemo, ali sta za L in J ta n_0 ista. Ampak trditev še vedno velja, ker lahko vzamemo večjega izmed njiju, ako bi bila drugačna.

Oglejmo si

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB| = |(a_n - A)b_n + A(b_n - B)| \leq |a_n - A| |b_n| + |A| |b_n - B|.$$

Od prej vemo, da sta zaporedji omejeni, ker sta konvergentni, zato $\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |b_n| \leq M$. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taka, da $n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2M}$ in $n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|A|}$. Tedaj za $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ velja $|a_n b_n - AB| \leq |a_n - A| |b_n| + |A| |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2M} M + |A| \frac{\varepsilon}{2|A|} = \varepsilon$, skratka $|a_n b_n - AB| < \varepsilon$, s čimer dokažemo $(a_n + b_n) \rightarrow A + B$.

/ Ker je $B \neq 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |b_n| \geq \frac{|B|}{2} > 0$. ZDB vsi členi zaporedja razen končno mnogo so v poljubno majhni okolici $|B|$. Če torej vzamemo točko na polovici med 0 in $|B|$, to je $\frac{|B|}{2}$, bo neskončno mnogo absolutnih vrednosti členov večjih od $\frac{|B|}{2}$. Pri razumevanju pomaga številka premica. Nadalje uporabimo predpostavko z $\varepsilon = \frac{|B|}{2}$, torej je za $n > n_0 : |B - b_n| < \frac{|B|}{2}$ in velja

$$|b_n| = |B - (B - b_n)| = |B + (-(B - b_n))| \stackrel{\text{trik. neen.}}{\geq} ||B| - |B - b_n|| = |B| - |B - b_n| \stackrel{\text{predp.}}{>} |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2},$$

skratka $|b_n| > \frac{|B|}{2}$. Če spet izpustimo končno začetnih členov, velja

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} = \frac{a_n B - Ab_n}{b_n B} \text{ prištejemo in odštejemo člen } \frac{(a_n - A)B + A(B - b_n)}{B b_n} = \frac{1}{b_n} (a_n - A) + \frac{A}{b_n} (B - b_n)$$

sedaj uporabimo na obeh straneh absolutno vrednost:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right| = \left| \frac{1}{b_n} (a_n - A) + \frac{A}{B b_n} (B - b_n) \right| \leq \frac{1}{|b_n|} |a_n - A| + \frac{|A|}{|B| |b_n|} |B - b_n| < \frac{2}{|B|} |a_n - A| + \frac{2|A|}{|B|^2} |B - B_n|$$

skratka $\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right| < \frac{2}{|B|} |a_n - A| + \frac{2|A|}{|B|^2} |B - B_n|$. Opazimo, da $\frac{2}{|B|}$ in $\frac{2|A|}{|B|^2}$ nista odvisna od n . Sedaj vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$ in $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takšna, da velja:

- $n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - A| < \frac{\varepsilon |B|}{4}$
- $n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - B| < \frac{\varepsilon |B|^2}{4|A|}$

Tedaj iz zgornje ocene sledi za $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right| < \frac{2}{|B|} \cdot \frac{\varepsilon |B|}{4} + \frac{2|A|}{|B|^2} \cdot \frac{\varepsilon |B|^2}{4|A|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

s čimer dokažemo $a_n/b_n \rightarrow A/B$.

□

Zgled. Naj bo $a > 0$. Izračunajmo

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{\dots}}}} =: \alpha.$$

α je torej $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, kjer je $x_0 = 0, x_1 = \sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \dots, x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$. Iz zadnjega sledi $x_{n+1}^2 = a + x_n$. Če torej limita $\alpha := \lim x_n$ obstaja, mora veljati $\alpha^2 = a + \alpha$ oziroma $\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$. Opcija z minusom ni mogoča, ker je zaporedje $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ očitno pozitivno. Če torej limita obstaja (**česar še nismo dokazali**), je enaka $\frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$, za primer $a = 2$ je torej $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots}}}} = 2$.

Pripomba. Lahko se zgodi, da limita rekurzivno podanega zaporedja ne obstaja, čeprav jo znamo izračunati, če bi obstajala. Na primer $y_1 := 1, y_{n+1} = 1 - 2y_n$ nam da zaporedje $1, -1, 3, -5, 11, \dots$, kar očitno nima limite. Če bi limita obstajala, bi zanjo veljalo $\beta = 1 - 2\beta$ oz. $3\beta = 1, \beta = \frac{1}{3}$. Navedimo torej nekaj zadostnih in potrebnih pogojev za konvergenco zaporedij.

Izrek. *Konvergenca monotonega in omejenega zaporedja. Naj bo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monotono realno zaporedje. Če narašča, ima limito $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Če pada, ima limito $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. (sup in inf imata lahko tudi vrednost ∞ in $-\infty$ — zaporedje s tako limito ni konvergentno v \mathbb{R}).*

Dokaz. Denimo, da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ narašča. Pišimo $s := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$. Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$. Tedaj $s - \varepsilon$ ni zgornja meja za $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, zato $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni s - \varepsilon < a_{n_0}$. Ker pa je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče, sledi $\forall n \geq n_0 : a_n \geq a_{n_0} > s - \varepsilon$. Hkrati je $a_n \leq s$, saj je s zgornja meja. Torej $\forall n \geq n_0 : a_n \in (s - \varepsilon, s] \subset (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$, s čimer dokažemo konvergenco.

Denimo sedaj, da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pada. Dokaz je povsem analogen. Pišimo $m := \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$. Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$. Tedaj $m + \varepsilon$ ni spodnja meja za $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, zato $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni m + \varepsilon > a_{n_0}$. Ker pa je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ padajoče, sledi $\forall n \geq n_0 : a_n \leq a_{n_0} < m + \varepsilon$. Hkrati je $a_n \geq m$, saj je m spodnja meja. Torej $\forall n \geq n_0 : a_n \in [m, m + \varepsilon) \subset (m - \varepsilon, m + \varepsilon)$. \square

Posledica. *Za monotono zaporedje velja, da je v \mathbb{R} konvergentno natanko tedaj, ko je omejeno.*

Zgled. Naj bo, kot prej, $a > 0$ in $x_0 = 0, x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$. Dokažimo, da je $(x_n)_n$ konvergentno. Dovolj je pokazati, da je naraščajoče in navzgor omejeno.

- Naraščanje z indukcijo: Baza: $0 = x_0 > x_1 = \sqrt{a}$. Dokažimo $x_{n+1} - x_n > 0$.

$$(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n) = x_{n+1}^2 - x_n^2 = (a + x_n) - (a + x_{n-1}) = x_n - x_{n-1}$$

Ker je zaporedje pozitivno, je $x_{n+1} + x_n > 0$. Desna stran je po I. P. pozitivna, torej tudi $x_{n+1} - x_n > 0$.

- Omejenost: Če je zaporedje res omejeno, je po zgornjem tudi konvergentno in je $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4a + 4a^2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{(2a + 1)^2}}{2} = 1 + a$. Uganili smo neko zgornjo mejo. Domnevamo, da $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq 1 + a$. Dokažimo to z indukcijo: Baza: $0 = x_0 < 1 + a$. Po I. P. $x_n > 1 + a$. Korak:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + a} \leq \sqrt{1 + a + a} = \sqrt{1 + 2a} < \sqrt{1 + 2a + 2a^2} = 1 + a$$

S tem smo dokazali, da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$.

To lahko dokažemo tudi na alternativen način. Vidimo, da je edini kandidat za limito, če obstaja $L = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ in da torej velja $L^2 = a + L$. Preverimo, da je L res limita:

$$x_{n+1} - L = \sqrt{a + x_n} - L = \frac{(\sqrt{a + x_n} - L)(\sqrt{a + x_n} + L)}{\sqrt{a + x_n} + L} = \frac{(a + x_n) - L^2}{\sqrt{a + x_n} + L} = \frac{(a + x_n) - (a + L)}{\sqrt{a + x_n} + L} = \frac{x_n - L}{\sqrt{a + x_n} + L}$$

Vpeljimo sedaj $y_n := x_n - L$. Sledi $|y_{n+1}| \leq \frac{|y_n|}{\sqrt{a + x_n} + L} \leq \frac{|y_n|}{L}$. Ker je $|y_0| = L$, dobimo³ oceno $|y_n| \leq \frac{1}{L^{n-1}}$ oziroma $|x_n - L| \leq \frac{1}{L^{n-1}}$. Ker iz definicije L sledi $L > 1$, je $L^n \rightarrow \infty$ za $n \rightarrow \infty$, torej smo dokazali, da $|x_n - L|$ eksponentno pada proti 0 za $n \rightarrow \infty$. Eksponentno padanje $|x_n - L|$ proti 0 je dovolj, da rečemo, da zaporedje konvergira k L^4 .

Trditev. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n$ ne obstajata.

Dokaz. Pišimo $a_n = \sin n$ in $b_n = \cos n$. Iz adicijskih izrekov dobimo $a_{n+1} = \sin(n + 1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1 = a_n \cos 1 + b_n \sin 1$. Torej $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n \cos 1}{\sin 1}$. Torej če $\exists a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, a \in \mathbb{R}$, potem tudi $\exists b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, b \in \mathbb{R}$. Podobno iz adicijske formule za $\cos(n + 1)$ sledi $a_n = \frac{b_n \cos 1 - b_{n+1}}{\sin 1}$, torej če $\exists b$, potem tudi $\exists a$. Iz obojega sledi, da $\exists a \Leftrightarrow \exists b$. Posledično, če a in b obstajata, iz zgornjih obrazcev za a_n in b_n sledi, da za

$$\lambda = \frac{1 - \cos 1}{\sin 1} \in (0, 1)$$

velja $b = \lambda a$ in $a = -\lambda b$ in zato $b = \lambda(-\lambda b)$ oziroma $1 = -\lambda^2$, torej $-1 = \lambda^2$, torej $\lambda = i$, kar je v protislovju z $\lambda \in (0, 1)$. Podobno za $a = -\lambda(\lambda a)$ oziroma $1 = -\lambda^2$, kar je zopet \times . Edina druga opcija je, da je $a = b = 0$. Hkrati pa vemo, da $a_n^2 + b_n^2 = 1$, zato $a + b = 1$, kar ni mogoče za ničelna a in b . Torej a in b ne obstajata. \square

³Za razumevanje si oglej nekaj členov rekurzivnega zaporedja $y_0 = L, y_n = \frac{|y_{n+1}|}{L}$. Začnemo z 1 in nato vsakič delimo z L .

⁴a res, vprašaj koga. ne razumem. zakaj. TODO.

2.3 Eulerjevo število

Izrek. Bernoullijeva neenakost. $\forall \alpha \leq 1, n \in \mathbb{N}$ velja $(1 - \alpha)^n \geq 1 - n\alpha$.

Dokaz. Z indukcijo na n ob fiksnem α .

- Baza: $n = 1$: $(1 - \alpha)^1 = 1 - 1\alpha$. Velja celo enakost.
- I. P.: Velja $(1 - \alpha)^n \geq 1 - n\alpha$
- Korak: $(1 - \alpha)^{n+1} = (1 - \alpha)(1 - \alpha)^n \geq (1 - \alpha)(1 - n\alpha) = 1 - n\alpha - \alpha + n\alpha^2 = 1 - (n + 1)\alpha + n\alpha^2 \geq 1 - (n + 1)\alpha$, torej ocena velja tudi za $n + 1$.

□

Definicija. Vpeljimo oznaki:

- Za $n \in \mathbb{N}$ označimo $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ (pravimo n -faktoriala oziroma n -fakulteta). Ker velja $n! = n \cdot (n - 1)!$ za $n \geq 2$, je smiselno definirati še $0! = 1$.
- Za $n, k \in \mathbb{N}$ označimo še binomski simbol: $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (pravimo n nad k).
- Če je $(a_k)_k$ neko zaporedje (lahko tudi končno), lahko pišemo $\sum_{k=1}^n a_k := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ (pravimo summa) in $\prod_{k=1}^n a_k := a_1 \cdots a_n$ (pravimo produkt).

Zgled. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ in $\prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$.

Izrek. Binomska formula. $\forall a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} : (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Dokaz. Indukcija po n .

- Baza $n = 1$: $\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} a^0 b^{1-0} + \binom{1}{1} a^1 b^{1-1} = a + b = (a + b)^1$
- I. P. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a + b)^n$
- Korak:

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

sedaj naj bo $m = k + 1$ v levem členu:

$$= \sum_{m=1}^{n+1} \binom{n}{m-1} a^m b^{n-(m-1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} =$$

Sedaj obravnavajmo le izraz v oglatih oklepajih:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{kn!}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{kn! + n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{n!(k+n-k+1)}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

in skratka dobimo $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$. Vstavimo to zopet v naš zgornji račun:

$$\begin{aligned} \dots &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} = \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} \end{aligned}$$

□

Izrek. Bernoulli. Zaporedje $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je konvergentno.

Dokaz. Dokazali bomo, da je naraščajoče in omejeno.

- Naraščanje: Dokazujemo, da za $n \geq 2$ velja $a_n \geq a_{n-1}$ oziroma

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\stackrel{?}{\geq} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n-1}{n-1} + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1-n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-n} \\ &\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{?}{\geq} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-n} \\ \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n &= \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{?}{\geq} 1 - \frac{1}{n} \\ \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n &\stackrel{?}{\geq} 1 - \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

kar je poseben primer Bernoullijeve neenakosti za $\alpha = \frac{1}{n^2}$.

- Omejenost: Po binomski formuli je

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot (1-\frac{1}{n}) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) < 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} < 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = \dots \end{aligned}$$

Opomnimo, da je $1 - \frac{j}{n} < 1$, zato $\prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) < 1$ (prvi neenačaj) ter $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{k-1}$ (drugi). Sedaj si z indukcijo dokažimo $\sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$:

– Baza: $n = 2$: $\frac{1}{2^{2-1}} = 1 - \frac{1}{2^{2-1}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Velja!

– I. P.: $\sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

– Korak: $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n+1-1}} = 1 - 2 \cdot 2^{-n} + 2^{-n} = 1 + 2^{-n} (1 - 2) = 1 + 2^{-n}$

In nadaljujmo z računanjem:

$$\dots = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

s čimer dobimo zgornjo mejo $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < 3$. Ker je očitno $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > 0$, je torej zaporedje omejeno in ker je tudi monotonno po prejšnjem izreku konvergentno. □

Definicija. Označimo število $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ in ga imenujemo Eulerjevo število. Velja $e \approx 2,71828$.

Pripomba. V dokazu vidimo moč izreka „omejenost in monotonost \Rightarrow konvergenca“, saj nam omogoča dokazati konvergentnost zaporedja brez kandidata za limito. Jasno je, da ne bi mogli vnaprej uganiti, da je limita ravno transcendentno število e .

Definicija. Podzaporedje zaporedja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je poljubno zaporedje oblike $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, kjer je $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strogo naraščajoča funkcija.

Izrek. Če je $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, tedaj je L tudi limita vsakega podzaporedja.

Dokaz. Po predpostavki velja $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 : |a_n - L| < \varepsilon$. Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$. Po predpostavki obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da bodo vsi členi zaporedja po n_0 -tem v $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Iz definicijskega območja φ vzemimo poljuben element n_1 , da velja $n_1 \geq n_0$. Gotovo obstaja, ker je definicijsko območje števno neskončne moči in s pogojem $n_1 \geq n_0$ onemogočimo izbiro le končno mnogo elementov. Velja $\forall n \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow |a_{\varphi n} - L| < \varepsilon$, ker je φ strogo naraščajoča in izbiramo le elemente podzaporedja, ki so v izvornem zaporedju za n_0 -tim členom in zato v $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. □

Zgled. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ za zaporedje $a_n = \frac{1}{n}$ in podzaporedje $a_{\varphi n}$, kjer je $\varphi(n) = 2n + 3$.

Izrek. *Karakterizacija limite s podzaporedji.* Naj bo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ realno zaporedje in $L \in \mathbb{R}$. Tedaj $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \Leftrightarrow$ za vsako podzaporedje $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ zaporedja $(a_n)_n$ obstaja njegovo podzaporedje $(a_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$, ki konvergira k L .

Dokaz. Dokazujemo ekvivalenco:

(\Rightarrow) Dokazano poprej. Limita se pri prehodu na podzaporedje ohranja.

(\Leftarrow) PDDRAA $a_n \not\rightarrow L$. Tedaj $\exists \varepsilon > 0$ in podzaporedje $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \ni: \forall k \in \mathbb{N} : |a_{n_k} - L| > \varepsilon$ (*). Po predpostavki sedaj $\exists (a_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}} \ni: \lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_{k_l}} = L$. To pa je v protislovju z (*), torej je začetna predpostavka $a_n \not\rightarrow L$ napačna, torej $a_n \rightarrow L$. □

2.4 Stekališča

Definicija. Točka $s \in \mathbb{R}$ je stekališče zaporedja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, če v vsaki okolici te točke leži neskončno členov zaporedja.

Pripomba. Pri limiti zahtevamo več; da izven vsake okolice limite leži le končno mnogo členov.

Zgled. Primeri stekališč.

1. $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \Rightarrow L$ je stekališče za a_n
2. $0, 1, 0, 1, \dots$ stekališči sta $\{0, 1\}$ in zaporedje nima limite (ni konvergentno)
3. $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots$ ima neskončno stekališč, \mathbb{N} .
4. $b_n = n$ -to racionalno število⁵ ima neskončno stekališč, \mathbb{R} .

Pripomba. Limita je stekališče, stekališče pa ni nujno limita. Poleg tega, če se spomnimo, velja, da vsota konvergentnih zaporedij konvergira k vsoti njunih limit, ni pa nujno res, da so stekališča vsote dveh zaporedij paroma vsote stekališč teh dveh zaporedij. Primer: $a_n = (-1)^n$ in $b_n = -(-1)^n$. Njuni stekališči sta $\{-1, 1\}$, toda $a_n + b_n = 0$ ima le stekališče $\{0\}$, ne pa tudi $\{1, -1, 2, -2\}$.

Izrek. S je stekališče $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow S$ je limita nekega podzaporedja a_n .

Dokaz. Dokazujemo ekvivalenco.

(\Leftarrow) Očitno.

(\Rightarrow) Definirajmo $\forall m \in \mathbb{N} : U_m := (S - \frac{1}{m}, S + \frac{1}{m})$. Ker je S stekališče, $\forall m \in \mathbb{N} \exists a_{k_m} \in U_m$. Podzaporedje $(a_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$ konvergira k S , kajti $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_{k_n} - S| < \frac{1}{n} < \varepsilon$. □

Posledica. Če je L limita nekega zaporedja, je L edino njegovo stekališče.

Dokaz. Naj bo $a_n \rightarrow L$. Naj bo S stekališče za $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Po izreku zgoraj je S limita nekega podzaporedja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Toda limita vsakega podzaporedja je enaka limiti zaporedja, iz katerega to podzaporedje izhaja, če ta limita obstaja. Potemtakem je $S = L$. □

Izrek. *Bolzano-Weierstraß. Eksistenčni izrek.* Vsako omejeno zaporedje v realnih številih ima kakšno stekališče v \mathbb{R} .

⁵Racionalnih števil je števno mnogo, zato jih lahko linearno uredimo in oštevilčimo.

Dokaz. Označimo $m_0 := \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n, M_0 := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n, I_0 := [m_0, M_0]$. Očitno je $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in I_0$. Interval I_0 razdelimo na dve polovici: $I_0 = [m_0, \frac{m_0+M_0}{2}] \cup [\frac{m_0+M_0}{2}, M_0]$. Izberemo polovico (vsaj ena obstaja), v kateri leži neskončno mnogo členov, in jo označimo z I_1 . Spet jo razdelimo na pol in z I_2 označimo tisto polovico, v kateri leži neskončno mnogo členov. Postopek ponavljamo in dobimo zaporedje zaprtih intervalov $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in velja $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ ter $|I_n| = 2^{-n} |I_0|$.

Označimo sedaj $I_n = [l_n, d_n]$. Iz konstrukcije je očitno, da $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ narašča in $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pada ter da sta obe zaporedji omejeni. Posledično $l := \lim_{n \rightarrow \infty} l_n, d := \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$. Iz $l_n \leq l \leq d \leq d_n$ sledi ocena $d - l \leq d_n - l_n = |I_n| = 2^{-n} |I_0|$, kar konvergira k 0. Posledično $d = l$.

Treba je pokazati še, da je $d = l$ stekališče za $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$. Ker je $l = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} \ni l_{n_1} > l - \varepsilon$ in ker je $d = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} \ni d_{n_2} < d + \varepsilon$. Torej $[l_{n_1}, d_{n_2}] \subset (l - \varepsilon, d + \varepsilon)$. Torej za $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ velja $I_{n_0} = [l_{n_0}, d_{n_0}] \subset (l - \varepsilon, d + \varepsilon)$. Ker I_{n_0} po konstrukciji vsebuje neskončno mnogo elementov, jih torej tudi $(l - \varepsilon, d + \varepsilon)$ oziroma poljubno majhna okolica $d = l$, torej je $d = l$ stekališče za $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Posledica. Če je $s \in \mathbb{R}$ edino stekališče omejenega zaporedja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tedaj je $s = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Dokaz. Naj bo s stekališče $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. PDDRAA $a_n \not\rightarrow s$. Tedaj $\exists \varepsilon > 0 \ni$ izven $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ se nahaja neskončno mnogo členov zaporedja. Ti členi sami zase tvorijo omejeno zaporedje, ki ima po B.-W. izreku stekališče. Slednje gotovo ne more biti enako s , torej imamo vsaj dve stekališči, kar je v je v $\not\rightarrow$ s predpostavko. \square

Definicija. Pravimo, da ima realno zaporedje:

- stekališče v ∞ , če $\forall M > 0 : (M, \infty)$ vsebuje neskončno mnogo členov zaporedja
- limito v ∞ , če $\forall M > 0 : (M, \infty)$ vsebuje vse člene zaporedja od nekega indeksa dalje

in podobno za $-\infty$.

Pripomba. Povezava s pojmom realnega stekališča/limite: okolice „točke“ ∞ so intervali oblike (M, ∞) . To je smiselno, saj biti „blizu ∞ “ pomeni biti zelo velik, kar je ravno biti v (M, ∞) za poljubno velik M . „Okolica točke ∞ “ so torej vsi intervali oblike (M, ∞) .

2.5 Limes superior in limes inferior

Definicija. Naj bo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ realno zaporedje. Tvorimo novo zaporedje $s_n := \sup\{a_k; k \geq n\}$. Očitno je padajoče ($s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \dots$), ker je supremum množice vsaj supremum njene stroge podmnožice. Zaporedje $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ima limito, ki ji rečemo limes superior oziroma zgornja limita zaporedja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in označimo $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ in velja, da leži v $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Podobno definiramo tudi limes inferior oz. spodnjo limito zaporedja: $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{k \geq n} a_k) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (\inf_{k \geq n} a_k)$.

Pripomba. Za razliko od običajne limite, ki lahko ne obstaja, lim sup in lim inf vedno obstajata.

Trditev. $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ je največje stekališče zaporedja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ najmanjše.

Dokaz. Označimo $s := \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$. Za lim inf je dokaz analogen in ga ne bomo pisali. Dokazujemo, da je s stekališče in $\forall t > s : t$ ni stekališče. Ločimo primere:

$s \in \mathbb{R}$ Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Ker⁶ je $s = \inf s_n, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni s_{n_0} \in [s, s + \varepsilon)$. Ker $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pada proti s , sledi $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow s_n \in [s, s + \varepsilon)$. Po definiciji s_n velja $\forall n \in \mathbb{N} \exists N(n) \geq n \ni s_n - \varepsilon < a_{N(n)}$. Torej imamo $s - \varepsilon \leq s_n - \varepsilon < a_{N(n)} \leq s_n < s + \varepsilon$ (zadnji neenačaj za $n \geq n_0$), skratka $a_{N(n)} - s < \varepsilon$ oziroma $\forall n \geq n_0 : |a_{N(n)} - s| < \varepsilon$. Ker je $N(n) \geq n$, je $\{N(n); n \in \mathbb{N}\}$ neskončna množica, torej je neskončno mnogo členov v poljubni okolici s .

Treba je dokazati še, da $\forall t > s : t$ ni stekališče. Naj bo $t > s$. Označimo $\delta := t - s > 0$. Po definiciji⁷ $s \exists n_1 \in \mathbb{N} \ni s \leq s_{n_1} < s + \frac{\delta}{2} < s + t$. Ker $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pada proti s , sledi $\forall n \geq n_1 : s \leq s_n < s + \frac{\delta}{2}$. Po definiciji⁸ s_n sledi $\forall n \geq n_1 : a_n \leq s + \frac{\delta}{2}$. Za takšne n je $|t - a_n| = t - a_n \geq t - (s + \frac{\delta}{2}) = \frac{\delta}{2}$. Torej v $\frac{\delta}{2}$ -okolici točke t leži kvečjemu končno mnogo členov zaporedja oziroma členi $(a_1, a_2, \dots, a_{n_1-1})$. Torej t ni stekališče za $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

⁶Infimum padajočega konvergentnega zaporedja je očitno njegova limita.

⁷ s je limita zaporedja $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, zato v poljubno majhni okolici obstaja tak s_{n_1} . s_{n_1} torej tu najdemo v $[s, s + \frac{\delta}{2})$.

⁸ s_n je supremum členov od vključno n dalje

$s = \infty$ Naj bo $M > 0$ poljuben. Ker je $s = \inf s_n$, velja $\forall n \in \mathbb{N} : s_n = \infty$. Po definiciji $s_n = \infty$ velja $\forall n \in \mathbb{N} \exists N(n) : a_{N(n)} > M$. Ker je $N(n) \geq n$, je $\{N(n); n \in \mathbb{N}\}$ neskončna množica, torej je neskončno mnogo členov v (M, ∞) za poljuben M , torej je $s = \infty$ res stekališče.

Večjih stekališč od ∞ očitno ni.

$s = -\infty$ Naj bo $m < 0$ poljuben. Ker je $s = \inf s_n$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni : s_{n_0} \in (-\infty, m)$ Ker $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pada proti $s = -\infty$, sledi $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 : s_n \in (-\infty, m)$. Po definiciji s_n velja $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in (-\infty, m)$. Ker je za poljuben m neskončno mnogo členov v $(-\infty, m)$, je $s = -\infty$ res stekališče.

□

2.6 Cauchyjev pogoj

Definicija. Zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ustreza Cauchyjevemu pogoju (oz. je Cauchyjevo), če $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni : \forall m, n \in \mathbb{N} : m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$. ZDB Dovolj pozni členi so si poljubno blizu.

Trditev. Zaporedje v \mathbb{R} je konvergentno \Leftrightarrow je Cauchyjevo.

Dokaz. Dokazujemo ekvivalenco.

(\Rightarrow) Če $a_n \rightarrow L$, tedaj $|a_m - a_n| = |(a_m - L) + (L - a_n)| \leq |a_m - L| + |L - a_n|$. Cauchyjev pogoj sledi iz definicije limite za $\frac{\varepsilon}{2}$.

(\Leftarrow) Če je zaporedje Cauchyjevo, je omejeno: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni : \forall m, n \in \mathbb{N} : m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \leq 1$. V posebnem, $m = n_0$, $|a_{n_0} - a_n| \leq 1$ oziroma $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in [a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1]$. Preostali členi tvorijo končno veliko množico, ki ima min in max, torej je $\{a_k; k \in \mathbb{N}\} = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\} \cup \{a_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n_0\}$ tudi omejena. Po izreku od prej sledi, da ima zaporedje stekališče s . Dokažimo, da je $s = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$. Ker je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyjevo, $\exists n_1 \in \mathbb{N} \ni : \forall m, n \in \mathbb{N} : m, n \geq n_1 \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Po definiciji s $\exists n_2 \geq n_1 \ni : |a_{n_2} - s| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sledi $\forall n \geq n_2 : |a_n - s| = |a_n - s + s - a_{n_2}| \leq |a_n - a_{n_2}| + |s - a_{n_2}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

□

Pripomba. Moč izreka je v tem, da lahko konvergenco preverjamo tudi tedaj, ko nimamo kandidatov za limito.

3 Številske vrste

Kako sešteti neskončno mnogo števil? Nadgradimo pristop končnih vsot na neskončne vsote!

Definicija. Imejmo zaporedje $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $a_k \in \mathbb{R}$. Izraz $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ se imenuje vrsta s členi a_j . Pomen izraza opredelimo na naslednjo način:

Tvorimo novo zaporedje, pravimo mu zaporedje delnih vsot vrste: $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ..., $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{j=1}^n a_j$ — številu s_n pravimo n -ta delna vsota.

Vrsta je konvergentna, če je v \mathbb{R} konvergentno zaporedje $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Številu $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ tedaj pravimo vsota vrste in pišemo $s = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$. Pojem neskončne vsote torej prevedemo na pojem limite pridruženega zaporedja delnih vsot. Včasih vrsto (kot operacijo) enačimo z njeno vsoto (izidom operacije).

Če vrsta ni konvergentna, rečemo, da je divergentna. Enako, če je $s \in \{\pm\infty\}$.

Zgled. Primeri vrst.

- $a_n = \frac{1}{2^n}$, torej zaporedje $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$. Ali se sešteje v 1? Velja $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_j$. Pišimo $q = \frac{1}{2}$, tedaj $a_n = q^n$ in

$$s_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = q(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = q \frac{(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})(1 - q)}{1 - q} =$$

$$= q \frac{(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) - (q + q^2 + q^3 + \dots + q^n)}{1 - q} = q \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{q}{1 - q} (1 - q^n)$$

Izračunajmo $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q}{1 - q} (1 - q^n) = \frac{q}{1 - q}$ (velja, ker $q \in (-1, 1)$), torej je $s = \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1 - q}$.

2. Geometrijska vrsta (splošno). Naj bo $q \in \mathbb{R}$. Vrsta $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$ se imenuje geometrijska vrsta. Velja $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n q^j$ in $s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$. Če je $q = 1$, je $s_n = n + 1$, sicer množimo izraz z $(1 - q)$:

$$(1 + q + q^2 + \dots + q^n)(1 - q) = (1 + q + q^2 + \dots + q^n) - (q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}$$

torej $s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ in vrsta konvergira $\Leftrightarrow q \neq 1$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \exists \vee \mathbb{R}$. To pa se zgodi natanko za $q \in (-1, 1)$,

takrat je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$.

3. Harmonična vrsta. Je vrsta $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$. Velja $\frac{1}{j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, toda vrsta divergira. Dokaz sledi kmalu malce spodaj.

Vprašanje. *Kako lahko enostavno določimo, ali dana vrsta konvergira?*

3.1 Konvergenčni kriteriji

Izrek. *Cauchyjev pogoj.* Vrsta $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ je konvergentna \Leftrightarrow delne vrste ustrezajo Cauchyjevemu pogoju; $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Rightarrow |s_m - s_n| = \left| \sum_{j=n+1}^m a_j \right| < \varepsilon$.

Posledica. $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergira $\Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$.

Dokaz. Uporabimo izrek zgoraj za $n = m - 1$: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |s_n - s_{n+1}| = |a_n| < \varepsilon$. □

Zgled. Vrsti $\sum_{j=1}^{\infty} \cos n$ in $\sum_{j=1}^{\infty} \sin n$ divergirata, saj smo videli, da členi ne ene ne druge ne konvergirajo nikamor, torej tudi ne proti 0, kar je potreben pogoj za konvergenco vrste.

Zgled. Harmonična vrsta divergira. Protiprimer Cauchyjevga pogoja: Naj bo $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Tedaj ne glede na izbiro n_0 najdemo:

$$s_{2n} - s_n = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Dokaz divergence brez Cauchyjevga pogoja: $s_{2n} = a_1 + \sum_{j=1}^n (s_{2j} - s_{s_{j-1}}) > 1 + \frac{n}{2}$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{n}{2} = \infty$.

Izrek. *Primerjalni kriterij.* Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vrsti z nenegativnimi členi. Naj bo $\forall k \geq k_0 : a_k \leq b_k$ (od nekod naprej) — pravimo, da je $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ majoranta za $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ od nekod naprej.

- Če $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, tedaj tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
- Če $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, tedaj tudi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Zgled. Videli smo, da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergira. Kaj pa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$? Preverimo naslednje in uporabimo primerjalni kriterij:

1. $\forall k \in \mathbb{N} : \frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}$? Računajmo $k^2 \geq \frac{k(k+1)}{2} \sim k \geq \frac{k+1}{2} \sim \frac{k}{2} \geq \frac{1}{2}$. Velja, ker $k \in \mathbb{N}$.
2. Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}$ konvergira? Opazimo $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$. Za delne vsote vrste $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ velja:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

torej $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} = 2$. Posledično po primerjalnem kriteriju tudi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergira. Izkaže se $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,645$.

Izrek. *Kvocienčni oz. d'Alembertov kriterij.* Za vrsto s pozitivnimi členi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definirajmo $D_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, q \in (0, 1) \forall n \geq n_0 : D_n \leq q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ (vrsta konvergira)
2. $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : D_n \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ (vrsta divergira)
3. $\exists D = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n \in \mathbb{R} \Rightarrow$

(a) $D < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ (vrsta konvergira)

(b) $D > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ (vrsta divergira)

(c) $D = 1 \implies$ s tem kriterijem ne moremo določiti konvergence.

Dokaz. Razlaga.

- $\forall n > n_0 : D_n \leq q$, torej $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \sim a_{n+1} \leq qa_n$ in hkrati $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leq q \sim a_{n+2} \leq qa_{n+1}$, torej skupaj $a_{n+2} \leq qa_{n+1} \leq qqa_n = q^2a_n$, sledi $a_{n+k} \leq q^ka_n$. Vrsto smo majorizirali z geometrijsko vrsto, ki ob $q \in (0, 1)$ konvergira po primerjalnem kriteriju, zato tudi naša vrsta konvergira.
- $\forall n > n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq D \geq 1$, torej $a_{n+1} \geq a_n$ in hkrati $a_{n+2} \geq a_{n+1}$, torej skupaj $a_{n+k} \geq a_n$, sledi $\forall k \in \mathbb{N} : a_{n+k} \geq a_n$. Naša vrsta torej majorizira konstantno vrsto, ki očitno divergira; $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \geq \sum_{k=n_0}^{\infty} a_n = \infty$. Potemtakem tudi naša vrsta divergira. Poleg tega niti ne velja $a_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, torej vrsta gotovo divergira.
- Enako kot 1 in 2.

□

Zgled. Za $x > 0$ definiramo $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Vrsta res konvergira po točki 3a.

$$D_n = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)!} = \frac{x}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Izrek. *Korenski oz. Cauchyjev kriterij.* Naj bo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ vrsta z nenegativnimi členi. Naj bo $c_n := \sqrt[n]{a_n}$.

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}, q \in (0, 1) \forall n > n_0 : c_n \leq q \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$ (vrsta konvergira)
- $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : c_n \geq 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$ (vrsta divergira)
- $\exists c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \in \mathbb{R} \implies$
 - $c < 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$ (vrsta konvergira)
 - $c > 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$ (vrsta divergira)
 - $c = 1 \implies$ s tem kriterijem ne moremo določiti konvergence.

Dokaz. Skica dokazov.

- Velja $\forall n > n_0 : c_n \leq q$. To pomeni $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, torej $a_n \leq q^n$ in $a_{n+1} \leq q^{n+1}$, torej je vrsta majorizirana z geometrijsko vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$.
- Velja $\forall n > n_0 : c_n \geq 1$. To pomeni $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, torej $a_n \geq 1$, torej je vrsta majorizirana s konstantno in zato divergentno vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} 1$.
- Enako kot 1 in 2.

□

3.2 Alternirajoče vrste

Definicija. Vrsta je alternirajoča, če je predznak naslednjega člena nasproten predznaku tega člena. ZDB $\forall n \in \mathbb{N} :$

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n, \text{ kjer je } \operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\} \text{ s predpisom } \operatorname{sgn} a = \begin{cases} -1 & ; a < 0 \\ 1 & ; a > 0. \\ 0 & ; a = 0 \end{cases} \text{ ZDB } \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1}a_n \leq 0.$$

Izrek. *Leibnizov konvergenčni kriterij.* Naj bo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ padajoče zaporedje in $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Tedaj vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergira. Če je $s := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ in $s_n := \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$, tedaj $|s - s_n| \leq a_{n+1}$.

Dokaz. Skica dokaza. Vidimo, da delne vsote s_{2n} padajo k s'' in delne vsote s_{2n-1} naraščajo k s' . Toda ker $s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n}$, velja $s' = s''$. Limita razlike dveh zaporedij je razlika limit teh dveh zaporedij, torej $s' = s'' = s$. s je supremum lih in infimum sodih vsot. $|s - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| = a_{n+1}$. □

Zgled. Harmonična vrsta $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \rightarrow \infty$, toda alternirajoča harmonična vrsta $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \rightarrow \log 2$.

3.3 Absolutno konvergentne vrste

Definicija. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutno konvergentna, če je $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentna.

Izrek. *Absolutna konvergenca \Rightarrow konvergenca.*

Dokaz. Uporabimo Cauchyjev pogoj za konvergenco vrst in trikotniško neenakost.

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{j=n+1}^m a_j \right| \leq \sum_{j=n+1}^m |a_j| < \varepsilon$$

za $m, n \geq n_0$ za nek n_0 . □

Pripomba. Obrat ne velja, protiprimer je alternirajoča harmonična vrsta.

3.4 Pogojno konvergentne vrste

$\sum_{k=0}^{\infty} 2 - \sum_{k=0}^{\infty} 1 \neq \sum_{k=0}^{\infty} (2 - 1)$, temveč $\infty - \infty =$ nedefinirano.

Vprašanje. *Ross-Littlewoodov paradoks.* Ali smemo zamenjati vrstni red seštevanja, če imamo neskončno mnogo sumandov?

Najprej vprašanje natančneje opredelimo in vpeljimo orodja za njegovo obravnavo.

Definicija. Naj bo $\mathcal{M} \subset \mathbb{N}$. Permutacija \mathcal{M} je vsaka bijektivna preslikava $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. Če je $\mathcal{M} = \{a_1, \dots, a_n\}$ končna množica, tedaj π označimo s tabelo:

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \pi(a_1) & \cdots & \pi(a_n) \end{pmatrix}$$

Zgled.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Definicija. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je brezpogojno konvergentna, če za vsako permutacijo $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \pi(a_n)$ konvergira in vsota ni odvisna od π . Vrsta je pogojno konvergentna, če je konvergentna, toda ne brezpogojno.

Zgled. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ je pogojno konvergentna, ker pri seštevanju z vrstnim redom, pri katerem tisočim pozitivnim členom sledi en negativen in njemu zopet tisoč pozitivnih itd., vrsta ne konvergira.

Izrek. *Absolutna konvergenca \Leftrightarrow Brezpogojna konvergenca*

Izrek. *Riemannov sumacijski izrek.* Če je vrsta pogojno konvergentna, tedaj $\forall x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \exists$ permutacija $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \ni \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = x$. ZDB Končna vsota je lahko karkoli, če lahko poljubno spremenimo vrstni red seštevanja. Prav tako obstaja taka permutacija π , pri kateri $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ nima vsote ZDB delne vsote ne konvergirajo.

Zgled. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

4 Funkcijske vrste

Tokrat poskušamo seštevati funkcije. V prejšnjem razdelku seštevamo le realna števila. Funkcijska vrsta, če je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje funkcij $X \rightarrow \mathbb{R}$ in x zunanja konstanta, izgleda takole:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

Definicija. Naj bo X neka množica in $\Phi = \{\varphi_n : X \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ družina funkcij.

Pravimo, da funkcije φ_n konvergirajo po točkah na X , če je $\forall x \in X$ zaporedje $(\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentno.

Označimo limito s $\varphi(x)$. ZDB to pomeni, da

$$\forall \varepsilon > 0, x \in X : \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Pravimo, da funkcije φ_n konvergirajo enakomerno na X , če

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall x \in X, n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

oziroma ZDB

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x \in X} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

Poudariti je treba, da je pri konvergenci po točkah n_0 lahko odvisen od ε in x , pri enakomerni konvergenci pa le od ε .

Opomba. Očitno enakomerna konvergenca implicira konvergenco po točkah, obratno pa ne velja.

Zgled. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $\varphi_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ s predpisom $\varphi_n(x) = x^n$. Tedaj obstaja $\varphi(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [0, 1) \\ 1 & ; x = 1 \end{cases}$. Torej po definiciji velja $\varphi_n \rightarrow \varphi$ po točkah, toda ne velja $\varphi_n \rightarrow \varphi$ enakomerno. Za poljubno

velik pas okoli $\varphi(x)$ bodo še tako pozne funkcijske vrednosti $\varphi_n(x)$ od nekega x dalje izven tega pasu. Če bi $\varphi_n \rightarrow \varphi$ enakomerno, tedaj bi za poljuben $\varepsilon \in (0, 1)$ in dovolj pozne n (večje od nekega $n_0 \in \mathbb{N}$) veljalo $\forall x \in [0, 1] : |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$. To je ekvivalentno $\forall x \in (0, 1) : |x^n| < \varepsilon \Leftrightarrow n \log x < \log \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\log \varepsilon}{\log x}$. Toda $\lim_{x \nearrow 1} \frac{\log \varepsilon}{\log x} = \infty$, zato tak n ne obstaja.

Definicija. Naj bo X neka množica in $(f_j : X \rightarrow \mathbb{R})_{j \in \mathbb{N}}$ dano zaporedje funkcij. Pravimo, da funkcijska vrsta $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ konvergira po točkah na X , če $\forall x \in X : \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) < \infty$ (številka vrsta je konvergentna). ZDB to pomeni, da funkcijsko zaporedje delnih vsot $s_n := \sum_{j=1}^n f_j$ konvergira po točkah na X .

Funkcijska vrsta $s = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$ konvergira enakomerno na X , če funkcijsko zaporedje delnih vsot $s_n := \sum_{j=1}^n f_j$ konvergira enakomerno na X .

Funkcija oblike $x \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ se imenuje funkcijska vrsta.

Vaja. Dokaži, da $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ ne konvergira enakomerno! Vrsta konvergira po točkah le na intervalu $x \in (0, 1)$, za druge x divergira. Ko fiksiramo zunanjo konstanto, gre za geometrijsko vrsto. Delna vsota $\sum_{j=1}^n x^j = \frac{x(1-x^{n+1})}{1-x}$.

Velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(1-x^n)}{1-x} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x}{1-x}$. Sedaj prevedimo, ali $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall x \in (-1, 1), n \geq n_0 : \left| \frac{x(1-x^n)}{1-x} - \frac{x}{1-x} \right| < \varepsilon$. Za začetek si oglejmo le $x > 0$. Ker je tedaj $\frac{x(1-x^n)}{1-x} < \frac{x}{1-x}$, je $\left| \frac{x(1-x^n)}{1-x} - \frac{x}{1-x} \right| = \frac{x}{1-x} - \frac{x(1-x^n)}{1-x} = \frac{x - x + x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}$. Računajmo sedaj $\frac{x^{n+1}}{1-x} < \varepsilon \sim x^{n+1} < \varepsilon(1-x) \sim (n+1) \log x < \log(\varepsilon(1-x)) \sim n+1 > \frac{\log(\varepsilon(1-x))}{\log x} \sim n > \frac{\log(\varepsilon(1-x))}{\log x} - 1$. Ker je n odvisen od x , vsota ni enakomerno konvergentna.

Poseben primer funkcijskih vrst so funkcijske vrste funkcij oblike $f_j = b_j \cdot x^j$, torej potence (monomi).

Definicija. Potenčna vrsta je funkcijska vrsta oblike $\sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot x^j$, kjer so a $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ dana realna števila.

Izrek. *Cauchy-Hadamard.* Za vsako potenčno vrsto obstaja konvergenčni radij $R \in [0, \infty] \ni$:

- vrsta absolutno konvergira za $|x| < R$,
- vrsta divergira za $|x| > R$.

Velja $\frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|b_k|}$, kjer vzamemo $\frac{1}{0} := \infty$ in $\frac{1}{\infty} := 0$.

Dokaz. Rezultat že poznamo za zelo poseben primer $\forall j \in \mathbb{N} : b_j = 1$ (geometrijska vrsta). Ideja dokaza je, da konvergenco vsake potenčne vrste opišemo s pomočjo geometrijske vrste.

- Konvergenca: Za $x = 0$ vrsta očitno konvergira, zato privzamemo $x \neq 0$. Definirajmo R s formulo iz definicije ($R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|b_k|}}$). Naj bo x tak, da $|x| < R \leq \infty$ (sledi $R > 0$). Naj bo $\varepsilon > 0$. Tedaj po definiciji R velja $\sqrt[k]{|b_k|} \leq \frac{1}{R} + \varepsilon$ za vse dovolj velike k . Za take k sledi

$$|b_k| |x|^k \leq \left(\left(\frac{1}{R} + \varepsilon \right) |x| \right)^k.$$

Opazimo, da je desna stran neenačbe člen geometrijske vrste, s katero majoriziramo vrsto iz absolutnih vrednosti členov naše vrste. Preverimo, da desna stran konvergira. Konvergira, kadar $\left(\frac{1}{R} + \varepsilon \right) |x| < 1$ oziroma $\varepsilon < \frac{1}{|x|} - \frac{1}{R}$. Po primerjalnem kriteriju torej naša vrsta absolutno konvergira.

- Divergenca: Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$. Po definiciji R sledi, da je $\sqrt[k]{|b_k|} \geq \frac{1}{R} - \varepsilon$ za vse dovolj velike k . Za take k sledi

$$|b_k| |x|^k \geq \left(\left(\frac{1}{R} - \varepsilon \right) |x| \right)^k.$$

Opazimo, da je desna stran neenačbe člen geometrijske vrste, ki je majorizirana z vrsto iz absolutnih vrednosti členov naše vrste. Desna stran divergira, ko $(\frac{1}{R} - \varepsilon) |x| = 1$ oziroma $\varepsilon = \frac{1}{R} - \frac{1}{|x|}$, zato tudi naša vrsta divergira. \square

Zgled. Primer konvergenčnega radija potenčne vrste od prej: $\sum_{j=1}^{\infty} x^j$. Velja $\forall j \in \mathbb{N} : b_j = 1$, torej $R = \frac{1}{\limsup_{j \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|b_k|}} = 1$, torej po zgornjem izreku vrsta konvergira za $x \in (-1, 1)$ in divergira za $x \notin [-1, 1]$. Ročno lahko še preverimo, da divergira tudi v $\{-1, 1\}$.

5 Zveznost

Ideja: Izdelati želimo formulacijo, s katero preverimo, če lahko z dovolj majhno spremembo x povzročimo majhno spremembo funkcijske vrednosti.

Zgled. Primer nezvezne funkcije je $f(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq x < 1 \\ 1 & ; x = 1 \end{cases}$.

Definicija. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$ in $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Pravimo, da je f zvezna v a , če $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. f je zvezna na množici $x \subseteq D$, če je zvezna na vsaki točki v D .

Izrek. Karakterizacija zveznosti z zaporedji. Naj bodo D, a, f kot prej. Velja: f zvezna v $a \Leftrightarrow \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_n \in D : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$ ZDB f je zvezna v a , če za vsako k a konvergentno zaporedje na domeni velja, da funkcijske vrednosti členov zaporedja konvergirajo k funkcijski vrednosti a .

Dokaz. Dokazujemo ekvivalenco.

(\Rightarrow) Predpostavimo, da je f zvezna v a , torej $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Naj bo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ poljubno zaporedje na D , ki konvergira k a , se pravi $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon$. Naj bo ε poljuben. Vsled zveznosti f velja, da je $|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$ za vse take a_n , da velja $|a_n - a| < \delta$ za neko $\delta \in \mathbb{R}$. Ker je zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentno k a , so vsi členi po nekem n_0 v δ -okolici a , torej velja pogoj $|a_n - a| < \delta$, torej velja $|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$.

(\Leftarrow) PDDRAA f ni zvezna v a . Da pridemo do protislovja, moramo dokazati, da $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_n \in D \ni : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, a vendar $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq f(a)$. Ker f ni zvezna, velja, da $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D \ni : |x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$. Izberimo $\forall n \in \mathbb{N} : \delta_n := \frac{1}{n}$. Tedaj $\forall n \in \mathbb{N} \exists \varepsilon > 0, x \in D =: x_n \ni : |x_n - a| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. S prvim argumentom konjunkcije smo poskrbeli za to, da je naše konstruirano zaporedje $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentno k a . Konstruirali smo zaporedje, pri katerem so funkcijske vrednosti za vsak ε izven ε -okolice $f(a)$, torej zaporedje ne konvergira k $f(a)$. \square

Izrek. Karakterizacija zveznosti s pomočjo prasluk odprtih množic. Naj bo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. f je zvezna na $D \Leftrightarrow$ za vsako odprto množico $V \subset \mathbb{R}$ je $f^{-1}(V)$ spet odprta množica⁹.

Dokaz. Dokazujemo ekvivalenco.

(\Leftarrow) Predpostavimo, da za vsako odprto množico $V \subset \mathbb{R}$ je $f^{-1}(V)$ spet odprta množica. Dokazujemo, da je f zvezna na D . Naj bosta $a \in D, \varepsilon > 0$ poljubna. Naj bo $V := (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ odprta množica. Po predpostavki sledi, da je $f^{-1}(V)$ spet odprta. Ker je $a \in f^{-1}(V)$, je $a \in V$. Ker je V odprta, $\exists \delta > 0 \ni : (a - \delta, a + \delta) \in V$. Torej $\forall x \in D : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$, torej je f zvezna na D .

(\Rightarrow) Predpostavimo, da je f zvezna na D , to pomeni $\forall a \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Naj bo V poljubna odprta podmnožica \mathbb{R} in naj bo $a \in f^{-1}(V)$ poljuben (torej $f(a) \in V$). Ker je $f(a) \in V$, ki je odprta, $\exists \varepsilon > 0 \ni : (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \subseteq V$. Ker je f zvezna v a , $\exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$, torej je tudi neka odprta okolica $f(a)$ v $f^{-1}(V)$. Ker je bil a poljuben, je $f^{-1}(V)$ odprta, ker je bila V poljubna, je izrek dokazan.

⁹Za funkcijo $f : D \rightarrow V$ za $X \subseteq V$ definiramo $f^{-1}(X) := \{x \in D; f(x) \in V\} \subseteq D$.

□

Izrek. Naj bosta $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezni v $a \in D$. Tedaj so v a zvezne tudi funkcije $f + g, f - g, f \cdot g$ in f/g , slednja le, če je $g(a) \neq 0$.

Dokaz. Ker je f zvezna v a po izreku o karakterizaciji zveznosti z zaporedji velja za vsako $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in D, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ tudi $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$. Po izreku iz poglavja o zaporedjih velja, da $f(a_n) * g(a_n) \rightarrow (f * g)(a_n)$ za $*$ $\in \{+, -, \cdot, /\}$. Zopet uporabimo izrek o karakterizaciji zveznosti z zaporedji, ki pove, da so tudi $f * g$ za $*$ $\in \{+, -, \cdot, /\}$ zvezne v a . Pri deljenju velja omejitvev $f(a) \neq 0$. □

Izrek. Če sta $D, E \subseteq \mathbb{R}$ in $f : D \rightarrow E$ in $g : E \rightarrow \mathbb{R}$, je $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Hkrati pa, če je f zvezna v a in g zvezna v $f(a)$, je $g \circ f$ zvezna v a .¹⁰

Dokaz. Vzemimo poljubno $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$, da $a_n \rightarrow a \in D$. Zopet uporabimo izrek o karakterizaciji zveznosti z zaporedji: ker je f zvezna, velja $f(a_n) \rightarrow f(a)$ in ker je g zvezna, velja $g(f(a_n)) \rightarrow g(f(a))$. Potemtakem $(g \circ f)(a_n) \rightarrow (g \circ f)(a)$ in po istem izreku je $g \circ f$ zvezna na D . □

Izrek. Vsi polinomi so zvezni na \mathbb{R} .

Dokaz. Vzemimo $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k k^k$. Uporabimo prejšnji izrek. Polinom je sestavljen iz vsote konstantne funkcije, zmnožene z identiteto, ki je s seboj n -krat množena. Ker vsota in množenje ohranjata zveznost, je treba dokazati le, da je $f(x) = x$ zvezna in da so $\forall c \in \mathbb{R} : f(x) = c$ zvezne.

$f(x) = x$ Ali velja $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$? Da, velja. Vzamemo lahko katerokoli $\delta \in (0, \varepsilon]$.

$f(x) = c$ Naj bo $c \in \mathbb{R}$ poljuben. Tu je $|f(x) - f(a)| = |c - c| = 0$, torej je desna stran implikacije vedno resnična, torej je implikacija vedno resnična. □

Izrek. Vse elementarne funkcije so na njihovih definicijskih območjih povsod zvezne. To so: polinomi, potence, racionalne funkcije, koreni, eksponentne funkcije, logaritmi, trigonometrične, ciklotometrične in kombinacije neskončno mnogo naštetih, spojenih $+$, $-$, \cdot , $/$, \circ .

Dokaz. Tega izreka ne bomo dokazali. □

Zgled. $f(x) := \log(\sin^3 x + \frac{1}{8}) + \frac{1}{\sqrt[4]{x-7}}$ je zvezna povsod, kjer je definirana.

Definicija. Naj bo $\varepsilon > 0, a \in \mathbb{R}$ in $f : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$. Pravimo, da je $L \in \mathbb{R}$ limita f v točki a (zapišemo $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$), če za vsako zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}$, za katero velja $a_n \rightarrow a$, velja $f(a_n) \rightarrow L$
ZDB če $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

ZDB če za $\bar{f} : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x) & ; x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\} \\ L & ; x = a \end{cases}$ velja, da je zvezna v a .

Opomba. Vrednost $f(a)$, če sploh obstaja, nima vloge pri vrednosti limite.

Posledica. Naj bo $a \in D \subseteq \mathbb{R}$ in $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. f je zvezna v $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Zgled. Kvadratna funkcija $f(x) = x^2$ je zvezna. Vzemimo poljuben $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Obstajati mora taka $\delta > 0 \ni \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Podan imamo torej a in ε , želimo najti δ . Želimo priti do neenakosti, ki ima na manjši strani $|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2|$ in na večji strani nek izraz z $|x - a|$, da ta $|x - a|$ nadomestimo z δ in nato večjo stran enačimo z ε , da izrazimo ε v odvisnosti od δ in a .

Računajmo: $|x^2 - a^2| = |x - a| |x + a|$. Predelajmo izraz $|x + a| = |(x - a) + 2a| \leq |x - a| + |2a|$, torej skupaj $|x^2 - a^2| \leq |x - a| (|x - a| + |2a|)$. Sedaj nadomestimo $|x - a|$ z δ : $|x^2 - a^2| \leq \delta (\delta + |2a|)$. Iščemo tak ε , da velja $|x^2 - a^2| < \varepsilon$, zato enačimo $\delta (\delta + |2a|) = \varepsilon$ in dobimo kvadratno enačbo $\delta^2 + |2a| \delta - \varepsilon = 0$, ki jo rešimo z obrazcem za ničle:

$$\delta_{1,2} = \frac{-2|a| \pm \sqrt{4|a|^2 - 4\varepsilon}}{2} = -|a| \pm \sqrt{|a|^2 - \varepsilon}$$

¹⁰Velja $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Toda ker iščemo le pozitivne δ , je edina rešitev

$$\delta = -|a| + \sqrt{|a|^2 - \varepsilon} = \sqrt{|a|^2 - \varepsilon} - |a| = \frac{\sqrt{|a|^2 - \varepsilon} - |a|}{1} = \frac{\left(\sqrt{|a|^2 - \varepsilon} - |a|\right) \left(\sqrt{|a|^2 - \varepsilon} + |a|\right)}{\sqrt{|a|^2 - \varepsilon} + |a|} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|a|^2 - \varepsilon} + |a|}$$

Definicija. Naj bo $D \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \ni \forall \varepsilon > 0 : D \cap (a, a + \varepsilon) \neq \emptyset$. Naj bo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Število $L_+ \in \mathbb{R}$ je desna limita funkcije f v točki a , če $\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \cap (a, \infty) : a_n \rightarrow a \Rightarrow f(a_n) \rightarrow L_+$. ZDB če za vsako k a konvergentno zaporedje s členi desno od a velja, da funkcijske vrednosti členov konvergirajo k L_+ . Oznaka $L_+ = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = f(a+0)$. Podobno definiramo tudi levo limito $L_- = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x) = f(a-0)$.

Izrek. Naj bo $D \subset \mathbb{R}$ in $a \in \mathbb{R}$ da velja $\forall \varepsilon > 0 : D \cap (a, a - \varepsilon) \neq \emptyset \wedge D \cap (a, a + \varepsilon) \neq \emptyset$. Naj bo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Velja $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \nearrow a} f(x) \wedge \exists \lim_{x \searrow a} f(x) \wedge \lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x)$. V tem primeru velja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x)$.

Definicija. Označimo $\lim_{x \searrow a} f(x) =: f(a+0), \lim_{x \nearrow a} f(x) =: f(a-0)$. Če $\exists f(a+0)$ in $\exists f(a-0)$, vendar $f(a+0) \neq f(a-0)$, pravimo, da ima f v točki a „skok“.

Zgled. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+e^{1/x}}$ ne obstaja. Zakaj? Izračunajmo levo in desno limito:

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 0, \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 1$$

Toda $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \nearrow a} f(x) \wedge \exists \lim_{x \searrow a} f(x) \wedge \lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x)$.

Definicija. Funkcija f je na intervalu D odsekoma zvezna, če je zvezna povsod na D , razen morda v končno mnogo točkah, v katerih ima skok.

Zgled. Naj bo $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$. Zanima nas, ali obstaja $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Grafični dokaz.

TODO XXX FIXME SKICA S TKZ EUCLID, glej ZVZ III/ANA1P1120/str.8

Slika 1: Skica.

Očitno velja $\triangle ABD \subset$ krožni izsek $DAB \subset \triangle ABC$, torej za njihove ploščine velja

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{2} &\leq \frac{x}{2\pi} \cdot x = \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2} && / \cdot \frac{2}{\sin x} \\ 1 &\leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} && / \lim_{x \rightarrow 0} \\ \lim_{x \rightarrow 0} 1 &\leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \\ 1 &\leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \leq 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} &= 1 \end{aligned}$$

Da naš sklep res potrdimo, je potreben spodnji izrek.

Izrek. Če za $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ velja za $a \in D$:

- $\exists \varepsilon > 0 \forall x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\} : f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ in hkrati
- $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ in $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) =: L$, tedaj tudi $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ in $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

Dokaz. Naj bo $A = A(x) := \max\{|f(x) - L|, |h(x) - L|\}$. Velja

- $g(x) - L \leq h(x) - L \leq |h(x) - L| \leq A(x)$ in
- $L - g(x) \leq L - f(x) \leq |f(x) - L| \leq A(x)$.

Posledično $|g(x) - L| \leq A(x)$. Naj bo sedaj $\varepsilon > 0$ poljuben. Tedaj velja $\exists \delta_1 > 0 \ni |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ in $\exists \delta_2 > 0 \ni |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon$. Za $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ torej velja $|x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$. \square

5.1 Zvezne funkcije na kompaktnih množicah

Definicija. Množica $K \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktna \Leftrightarrow je zaprta in omejena ZDB je unija zaprtih intervalov.

Izrek. Naj bo $K \subset \mathbb{R}$ kompaktna in $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj je f omejena in doseže minimum in maksimum.

Zgled. Primeri funkcij.

1. $f_1(x) = \frac{1}{x}$ na $I_1 = (0, 1]$. f_1 je zvezna in $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = \infty$, torej ni omejena, a I_1 ni zaprt.
2. $f_2(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \\ \frac{1}{x} & ; x \in (0, 1] \end{cases}$ ni omejena in je definirana na kompaktni množici, a ni zvezna.
3. $f_3(x) = x$ na $x \in (0, 1)$. Je omejena, ne doseže maksimuma, a D_{f_3} ni kompaktna (ni zaprta).
4. $f_4(x) = \begin{cases} x & ; x \in (0, 1) \\ \frac{1}{2} & ; x \in \{0, 1\} \end{cases}$. Velja $\sup f_4 = 1$, ampak ga ne doseže, a ni zvezna

Dokaz. Naj bo $K \subseteq \mathbb{R}$ kompaktna in $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna.

- Omejenost navzgor: PDDRAA f ni navzgor omejena. Tedaj $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in K \ni f(x_n) \geq n$ (*). Ker je $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ omejeno zaporedje (vsi členi so na kompaktni K), ima stekališče, recimo mu $s \in \mathbb{R}$. Vemo, da tedaj obstaja podzaporedje $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \ni s = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Ker je K tudi zaprta, sledi $s \in K$. Ker je f zvezna na K , velja $f(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k})$. Toda po (*) sledi $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty$, zato $f(s) = \infty$, kar ni mogoče, saj je $f(s) \in \mathbb{R}$. \times . Torej je f navzgor omejena.
- Omejenost navzdol: PDDRAA f ni navzdol omejena. Tedaj $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in K \ni f(x_n) \leq -n$ (*). Ker je $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ omejeno zaporedje (vsi členi so na kompaktni K), ima stekališče, recimo mu $s \in \mathbb{R}$. Vemo, da tedaj obstaja podzaporedje $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \ni s = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Ker je K tudi zaprta, sledi $s \in K$. Ker je f zvezna na K , velja $f(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k})$. Toda po (*) sledi $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = -\infty$, zato $f(s) = -\infty$, kar ni mogoče, saj je $f(s) \in \mathbb{R}$. \times . Torej je f navzdol omejena.
- Doseže maksimum: Označimo $M := \sup_{x \in K} f(x)$. Ravno kar smo dokazali, da $M < \infty$. Po definiciji supremuma $\forall n \in \mathbb{N} \exists t_n \in K \ni f(t_n) > M - \frac{1}{n}$. Ker je K omejena, ima $(t_n)_n$ stekališče in ker je zaprta, velja $t \in K$, zato \exists podzaporedje $(t_{n_j})_{j \in \mathbb{N}} \ni t = \lim_{j \rightarrow \infty} t_{n_j}$. Ker je f zvezna, velja $f(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(t_{n_j})$. Toda ker $f(t_{n_j}) > M - \frac{1}{n_j} \geq M - \frac{1}{j}$, velja $f(t) \geq M$. Hkrati po definiciji M velja $f(t) \leq M$. Sledi $M = f(t)$ in zato $M = \max_{x \in K} f(x)$.
- Doseže minimum: Označimo $M := \inf_{x \in K} f(x)$. Ko smo dokazali omejenost, smo dokazali, da $M > -\infty$. Po definiciji infimuma $\forall n \in \mathbb{N} \exists t_n \in K \ni f(t_n) < M + \frac{1}{n}$. Ker je K omejena, ima $(t_n)_n$ stekališče in ker je zaprta, velja $t \in K$, zato \exists podzaporedje $(t_{n_j})_{j \in \mathbb{N}} \ni t = \lim_{j \rightarrow \infty} t_{n_j}$. Ker je f zvezna, velja $f(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(t_{n_j})$. Toda ker $f(t_{n_j}) < M + \frac{1}{n_j} \leq M + \frac{1}{j}$, velja $f(t) \leq M$. Hkrati po definiciji M velja $f(t) \geq M$. Sledi $M = f(t)$ in zato $M = \min_{x \in K} f(x)$.

□

Izrek. Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in $f(a)f(b) < 0$. Tedaj $\exists \xi \in (a, b) \ni f(\xi) = 0$.

Dokaz. Interval $I_0 = [a, b]$ razpolovimo. To pomeni, da pogledamo levo in desno polovico intervala I_0 , torej $[a, \frac{a+b}{2}]$ in $[\frac{a+b}{2}, b]$. Če je $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, smo našli iskano točko ξ , sicer z I_1 označimo katerokoli izmed polovic, ki ima f v krajiščih različno predznačene funkcijske vrednosti. Torej $I_1 = \begin{cases} [a, \frac{a+b}{2}] & ; f(a)f(\frac{a+b}{2}) < 0 \\ [\frac{a+b}{2}, b] & ; f(\frac{a+b}{2})f(b) < 0 \end{cases}$. S postopkom nadaljujemo. Če v končno mnogo korakih najdemo ξ , da je $f(\xi) = 0$, fino, sicer pa dobimo zaporedje intervalov $I_n = [a_n, b_n] \subset [a, b] = I_0 \ni$:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : |I_n| = 2^{-n} |I_0|$ in
2. $\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+1} \subset I_n$, torej $a_{n+1} \geq a_n \wedge b_{n+1} \leq b_n$, in
3. $\forall n \in \mathbb{N} : f(a_n)f(b_n) < 0$.

Ker sta zaporedji $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ omejeni in monotoni, imata po izreku o konvergenci monotoni in omejenih zaporedij limiti $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ in $\beta := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n$ in $\alpha, \beta \in I_0$, ker je I_0 zaprt.

Sledi $\forall n \in \mathbb{N} : |\alpha - \beta| = \beta - \alpha \leq b_n - a_n = |I_n| = 2^{-n} |I_0|$, torej $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha - \beta| = 0 \Rightarrow \alpha - \beta = 0$.

Ker je f zvezna in $a_n, b_n, \xi \in I_0$, sledi $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\alpha) = f(\xi) = f(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$.

Po točki 3 velja $f(\alpha) f(\beta) \leq 0$. Ker pa $f(\alpha) = f(\beta)$, velja $f(\alpha) = f(\beta) = f(\xi) = 0$. □

Posledica. Naj bo $I = [a, b]$ omejen zaprt interval $\in \mathbb{R}$ in $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj $\exists x_-, x_+ \in I \ni \forall x \in I : f(x) \in [f(x_-), f(x_+)]$ in $\forall y \in [f(x_-), f(x_+)] \exists x \in I \ni y = f(x)$ ZDB $f(I) = [f(x_-), f(x_+)]$ ZDB zvezna funkcija na zaprtem intervalu $[a, b]$ doseže vse funkcijske vrednosti na intervalu $[f(a), f(b)]$.

Dokaz. Dokaz posledice. Naj bo y poljuben. Če je $y = f(x_-)$, smo našli $x = x_-$. Če je $y = f(x_+)$, smo našli $x = x_+$. Sicer pa je $f(x_-) < y < f(x_+)$. Oglejmo si funkcijo $g(x) := f(x) - y$. Ker je $g(x_-) = f(x_-) - y < 0$ in $g(x_+) = f(x_+) - y > 0$ in g zvezna na $[x_- - y, x_+ - y]$, torej po prejšnjem izreku $\exists x \in [x_- - y, x_+ - y] \ni g(x) = 0$, kar pomeni ravno $f(x) = y$. □

Izrek. Naj bo I poljuben interval med $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ in $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in strogo monotona. Tedaj je $f(I)$ interval med $f(a + 0)$ in $f(a - 0)$. Inverzna funkcija f^{-1} je definirana na $f(I)$ in zvezna.

Zgled. $f := \arctan$, $I := (-\infty, \infty)$, zvezna. Naj bo $y \in f(I)$ poljuben. Tedaj $\exists! x \in I \ni y = f(x)$ in definiramo $x := f^{-1}(y)$. f^{-1} obstaja in je spet zvezna.

Dokaz. Ne bomo dokazali. □

5.2 Enakomerna zveznost

Definicija. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je enakomerno zvezna na I , če

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in I : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Opomba. Primerjajmo to z definicijo $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je (nenujno enakomerno) zvezna na I , če

$$\forall \varepsilon > 0, a \in I \exists \delta > 0 \forall x \in I : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Pri slednji definiciji je δ odvisna od ε in a , pri enakomerni zveznosti pa le od ε .

Zgled. $f(x) = \frac{1}{x}$ ni enakomerno zvezna, ker je δ odvisen od a . Če pri fiksnem ε pomaknemo tisto pozitivno točko, v kateri preizkušamo zveznost, bolj v levo, bo na neki točki potreben ožji, manjši δ .

Izrek. Zvezna funkcija na kompaktni množici je enakomerno zvezna.

Dokaz. Naj bo $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna, kjer je K kompaktna podmnožica \mathbb{R} . PDDRAA f ni enakomerno zvezna. Zanima nas definicijo enakomerne zveznosti: $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x_\delta, y_\delta \in I : |x_\delta - y_\delta| < \delta \wedge |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$. x, y sta seveda lahko odvisna od δ in ε , zato v subskriptu pišemo δ , ki ji pripadata. Ker smo dejali, da to velja, si oglejmo $\forall n \in \mathbb{N} : \delta_n := \frac{1}{n}$ in pripadajoči zaporedji $(x_{1/n})_{n \in \mathbb{N}}$ in $(y_{1/n})_{n \in \mathbb{N}}$. Ker je K kompaktna, ima zaporedje $(x_{1/n})_{n \in \mathbb{N}}$ stekališče v $x \in K$, torej obstaja podzaporedje $(x_{1/n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, ki konvergira k x . Podobno obstaja podzaporedje $(y_{1/n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$, ki konvergira k $y \in K$. Pišimo sedaj $x_l := x_{1/n_{k_l}}$ in $y_l := y_{1/n_{k_l}}$.

Velja torej $x_l \rightarrow x$ in $y_l \rightarrow y$. Sledi $|x - y| \leq \lim_{l \rightarrow \infty} (|x - x_l| + |x_l - y_l| + |y_l - y|)$. Levi in desni člen sta v limiti enaka 0 zaradi konvergence zaporedja, srednji pa je manjši od $\frac{1}{j}$ zaradi naše predpostavke (PDDRAA), potemtakem je $x = y$.

Zato $\lim_{l \rightarrow \infty} (f(x_l) - f(y_l)) = \lim_{l \rightarrow \infty} [(f(x_l) - f(x)) + (f(x) - f(y)) + (f(y) - f(y_l))]$. Levi in desni člen sta v limiti enaka 0 zaradi konvergence zaporedja in zveznosti f , srednji pa je tudi 0, ker $x = y$, potemtakem $f(x_l) - f(y_l) \rightarrow 0$, kar je v protislovju z $|f(x_l) - f(y_l)| \geq \varepsilon$ za fiksen ε in $\forall l \in \mathbb{N}$. $\rightarrow \times$, f je enakomerno zvezna. □

Posledica. En zaprt interval $\frac{1}{x}$ bo enakomerno zvezen, $\frac{1}{x}$ sama po sebi kot $(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ pa ni definirana na kompaktni množici. Prav tako \arcsin in $x \mapsto \sqrt{x}$.

6 Odvod

Najprej razmislite/ideja. Odvod je hitrost/stopnja, s katero se v danem trenutku neka količina spreminja.

TODO XXX FIXME SKICA S TKZ EUCLID (ali pa — bolje — s čim drugim), glej PS zapiski/ANA1P FMF 2023-12-04.pdf

Slika 2: Skica.

Radi bi določili naklon sekante, torej naklon premice, določene z x in neko bližnjo točko $x+h$ na grafu funkcije, ki je odvisen le od x , ne pa tudi od izbire h . Bližnjo točko pošljemo proti začetni — h pošljemo proti 0. Naklon izračunamo s izrazom $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Definicija. Odvod funkcije f v točki x označimo $f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Če limita obstaja v točki x , pravimo, da je funkcija odvedljiva v x . Pravimo, da je f odvedljiva na množici $I \subseteq \mathbb{R}$, če je odvedljiva na vsaki $t \in I$.

Zgled. Primeri odvodov preprostih funkcij.

$$f(x) = c, c \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

$$f(x) = x \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

$$f(x) = x^2 \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x$$

Trditev. Odvod potence. Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ so funkcije $f(x) = x^n$ odvedljive na \mathbb{R} in velja $f'(x) = nx^{n-1}$.

Dokaz.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k} - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nhx^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k} - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nhx^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \left(nx^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k} \right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k} \right) \\ &= nx^{n-1} + \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

□

Trditev. $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$

Dokaz. Najprej dokažimo $\sin' = \cos$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \sin h \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \frac{-\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{\cos h + 1} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \left(\cos x - \sin x \frac{\sin h}{\cos h + 1} \right) = \cos x \end{aligned}$$

Sedaj dokažimo še $\cos' = -\sin$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} - \sin x \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \frac{-\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{\cos h + 1} - \sin x \frac{\sin h}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin h}{h} \left(-\cos x \frac{\sin h}{\cos h + 1} - \sin x \right) \right) = -\sin x \end{aligned}$$

□

Dejstvo. Od prej vemo $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (limita zaporedja). Velja tudi $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (funkcijska limita). Ne bomo dokazali.

Trditev. Odvod eksponentne funkcije. Naj bo $a > 0$ in $f(x) = a^x$. Tedaj je $f'(x) = a^x \ln a$.

Dokaz.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = \dots$$

Sedaj pišimo $\frac{1}{z} := a^h - 1$. Ulomek $\frac{a^h - 1}{h}$ namreč ni odvisen od x . Sedaj

$$\begin{aligned} a^h - 1 &= \frac{1}{z} \\ a^h &= \frac{1}{z} + 1 \\ h &= \log_a \left(\frac{1}{z} + 1 \right) \\ h &= \frac{\ln \left(\frac{1}{z} + 1 \right)}{\ln a} \end{aligned}$$

Nadaljujmo s prvotnim računom, ločimo primere:

$a > 1, h \searrow 0$ Potemtakem $a^h - 1 \searrow 0$, torej $\frac{1}{z} \searrow 0$, sledi $z \nearrow \infty$.

$$\dots = a^x \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{z}}{\frac{\ln \left(\frac{1}{z} + 1 \right)}{\ln a}} = a^x \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{z} \ln a}{\ln \left(\frac{1}{z} + 1 \right)} = a^x \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln a}{\ln \left(\frac{1}{z} + 1 \right)^z} = a^x \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln a}{\ln e} = a^x \ln a$$

$a > 1, h \nearrow 0$ Potemtakem $a^h - 1 \nearrow 0$, torej $\frac{1}{z} \nearrow 0$, sledi $z \searrow -\infty$.

$$\dots = a^x \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\ln a}{\ln \left(\frac{1}{z} + 1 \right)^z} = a^x \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\ln a}{\ln \left(\frac{1}{z} + 1 \right)^z} = a^x \ln a$$

Kajti $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$.

$a \in (0, 1]$ Podobno kot zgodaj, bodisi $z \nearrow \infty$ bodisi $z \searrow -\infty$.

□

Trditev. Če je f odvedljiva v točki x , je tam tudi zvezna.

Dokaz. Predpostavimo, da obstaja limita $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Želimo dokazati $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(t)$. Računajmo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{t \rightarrow x} f(t) \\ 0 &= \lim_{t \rightarrow x} f(t) - f(x) \\ 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) - f(x) \\ 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h \right) \end{aligned}$$

Limita obstaja, čim obstajata $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, ki obstaja po predpostavki, in $\lim_{h \rightarrow 0} h$, ki obstaja in ima vrednost 0. □

Zgled. $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$. Je zvezna, ker je kompozitum zveznih funkcij, toda v 0 ni odvedljiva, kajti $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sgn} h$. Limita ne obstaja, ker $-1 = \lim_{h \nearrow 0} \operatorname{sgn} h \neq \lim_{h \searrow 0} \operatorname{sgn} h = 1$.

Izrek. Naj bosta f, g odvedljivi v $x \in \mathbb{R}$. Tedaj so $f + g, f - g, f \cdot g, f/g$ (slednja le, če $g(x) \neq 0$) in velja $(f \pm g)' = f' \pm g', (fg)' = f'g + fg', (f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Dokaz. Dokažimo vse štiri trditve.

$f + g$ Velja $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

$$\begin{aligned}(f + g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) + g(x + h) - f(x) - g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \right) = f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

$-f$ Naj bo $g = -f$. $g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(x+h)+f(x)}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -f'(x)$,
zato

$$(f - g)'(x) = (f + (-g))'(x) = f'(x) + (-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$f \cdot g$ Velja $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Prištejemo in odštejemo isti izraz (v oglatih oklepajih).

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(x + h) - (fg)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x) + [f(x)g(x + h) - f(x)g(x + h)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h)(f(x + h) - f(x)) + f(x)(g(x + h) - g(x))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} g(x + h) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} f(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)\end{aligned}$$

f/g Velja $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$. Prištejemo in odštejemo isti izraz (v oglatih oklepajih).

$$\begin{aligned}(f/g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f/g)(x + h) - (f/g)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)g(x)}{g(x+h)g(x)} - \frac{f(x)g(x+h)}{g(x)g(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x)g(x+h)}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h)g(x) - f(x)g(x + h)}{hg(x)g(x + h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \cdot \frac{g(x)}{g(x)g(x + h)} - \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \cdot \frac{f(x)}{g(x)g(x + h)} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\left(\frac{1}{g(x)g(x + h)} \right) \left(\frac{f(x + h) - f(x)}{h} g(x) - \frac{g(x + h) - g(x)}{h} f(x) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{g^2(x)} (f'(x)g(x) - g'(x)f(x)) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\end{aligned}$$

□

Zgled. $\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \cos^{-2}(x)$.

Izrek. *Odvod kompozituma.* Naj bo f odvedljiva v x in g odvedljiva v $f(x)$. Tedaj je $g \circ f$ odvedljiva v x in velja $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ (opomba: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$).

Dokaz. Označimo $a := f(x)$ in $\delta_h := f(x + h) - f(x)$, torej $f(x + h) := a + \delta(h)$.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x + h) - (g \circ f)(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x + h)) - g(f(x))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a + \delta_h) - g(a)}{\delta_h} \cdot \frac{\delta_h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a + \delta_h) - g(a)}{\delta_h} \cdot \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \dots\end{aligned}$$

Ker je f odvedljiva v x , je v x zvezna, zato sledi $h \rightarrow 0 \Rightarrow \delta_h \rightarrow 0$, torej

$$\dots = g'(a) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

□

Zgled. $\varphi(x) = \sin(x^2) = (g \circ f)(x)$, $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$ in velja $\varphi'(x) = g'(f(x)) f'(x) = \sin'(x^2) (x^2)' = 2x \cos(x^2)$.

Zgled. $\psi(x) = \sin^2(x) = (g \circ f)(x)$, $f(x) = \sin$, $g(x) = x^2$ in velja $\psi'(x) = g'(f(x)) f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$ (sinus dvojnega kota)

Zgled. $\delta'(x) = \sin(e^{x^2}) = \sin(g \circ h \circ f)(x)$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = e^x$, $f(x) = x^2$. $\delta'(x) = \cos(e^{x^2}) e^{x^2} 2x$, kajti $(e^x)' = e^x$.

Definicija. Funkcija $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je zvezno odvedljiva na I , če je na I odvedljiva in je f' na I zvezna.

Zgled. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ je na \mathbb{R} odvedljiva, a ne zvezno. Odvedljivost na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je očitna, preverimo še odvedljivost v 0:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

ker h pada k 0, $\sin \frac{1}{h}$ pa je omejen z 1. Velja torej

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

Preverimo nezveznost v 0. Spodnja limita ne obstaja.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) = - \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$$

Izrek. *Odvod inverza.* Naj bo f strogo monotona v okolici a , v a odvedljiva in naj bo $f'(a) \neq 0$. Tedaj bo inverzna funkcija, definirana v okolici $b = f(a)$ v b odvedljiva in veljalo bo $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Dokaz. Ker je zvezna in strogo monotona na okolici a , inverz na okolici $f(a)$ obstaja in velja $f(x) = s \Leftrightarrow x = f^{-1}(s)$, torej $f^{-1}(f(x)) = x$ za x v okolici a .

Uporabimo formulo za odvod kompozituma in velja

$$(f^{-1}(f(x)))' = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = (x)' = 1$$

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Vstavimo $x = f^{-1}(y)$ in dobimo za vsak y blizu $f(a)$:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

□

Zgled. Nekaj primerov odvodov inverza.

- $g(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ za $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$. Velja $g = f^{-1}$ za $f(x) = x^n$. Uporabimo formulo za odvod potence in zgornji izrek. Velja $f'(x) = nx^{n-1}$ in $f^{-1} = \sqrt[n]{x}$.

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\sqrt[n]{x})} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n x^{\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}$$

- $h(x) = \sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{m}{n}} = g(x)^m$ za $n, m \in \mathbb{N}$, $x > 0$. Uporabimo formulo za odvod potence in kompozituma in zgornji primer. Velja $g'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}$, torej

$$h'(x) = mg(x)^{m-1} \cdot g'(x) = m \left(x^{\frac{1}{n}} \right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} - 1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1}$$

- Izkaže se, da velja celo $\forall x > 0, \alpha \in \mathbb{R} : (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Mi smo dokazali le za $\alpha \in \mathbb{Q}$.

2. Logaritmi, inverz e^x . Gre za odvod eksponentne funkcije, torej $(a^x) = a^x \ln a$. Tedaj $(e^x) = e^x \ln e = e^x$. Uporavimo odvod inverza, torej $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ in za $g(x) = \log x$ uporabimo $g(x) = f^{-1}(x)$, kjer je $f(x) = e^x$:

$$\log'(x) = \left((e^x)^{-1} \right)'(x) = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

3. $g(x) = \arcsin x$ za $x \in [-1, 1]$, torej je $g = f^{-1}$, kjer je $f = \sin$ za $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$g'(\sin x) = \frac{1}{\cos x}$$

Ker velja $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, je $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, sledi $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, torej nadaljujemo:

$$g'(\sin x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

Sedaj zamenjamo $\sin x$ s t in dobimo:

$$g'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin^2 t$$

6.1 Diferencial

Fiksirajmo funkcijo f in točko $a \in \mathbb{R}$, v okolici katere je f definirana. Želimo oceniti vrednost funkcije f v bližini točke a z linearno funkcijo – to je $y(x) = \lambda x$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}$. ZDB Iščemo najboljši linearni približek, odvisen od h , za $f(a+h) - f(a)$.

Definicija. Naj bo f definirana v okolici točke $a \in \mathbb{R}$. Diferencial funkcije f v točki a je linearna preslikava $df(a) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ z zahtevo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - df(a)(h)|}{|h|} = 0.$$

Opomba.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - df(a)(h)}{h} = 0 = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{(df(a))(h)}{h} \right) =$$

Upoštevamo linearnost preslikave

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - df(a) = f'(a) - df(a) = 0$$

$$f'(a) = df(a)$$

Torej $f(a+h) - f(a) \approx df(a)(h)$ – najboljši linearni približek za $f(a+h) - f(a)$.

Zgled. Uporaba diferenciala. a je točka, v kateri znamo izračunati funkcijsko vrednost, $a+h$ pa je točka, v kateri želimo približek funkcijske vrednosti. Izračunajmo približek $\sqrt{2}$:

- $f(x) = \sqrt{x}$
- $a+h = 2$
- $a = 2,25, h = -0,25$
- $f(a) = \sqrt{a} = 1,5$
- $f'(s) = \frac{1}{2\sqrt{s}}, f(a = 2,25) = \frac{1}{3}$
- $f(2) \approx f(a) + f'(2,25) \cdot h = 1,5 - 0,25 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{17}{12}$.
- Preizkus: $\left(\frac{17}{12}\right)^2 = \frac{289}{144} = 2 + \frac{1}{144}$... Absolutna napaka $\frac{1}{144}$.

Definicija. Naj bo $I \subseteq \mathbb{R}$ interval in $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva povsod na I . Vzemimo $a \in I$. Če je v a odvedljiva tudi f' , pišemo $f''(a) = (f'(a))'$. Podobno pišemo tudi višje odvode: $f^{(1)}(a) = f'(a)$, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$, $f^{(0)}(a) = f(a)$, $f^{(2)}(a) = f''(a)$.

Opomba. Pomen besede „odvod“:

- Odvod v dani točki: $f'(a)$ za fiksen $a \in \mathbb{R}$ ali
- Funkcija, ki vsaki točki $x \in \mathbb{R}$ priredi $f'(x)$ po zgornji definiciji.

Definicija. $C^n(I)$ je množica funkcije $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, da $\forall x \in I \exists f'(x), f''(x), f^{(3)}, \dots, f^{(n)}(x)$ in da so $f, f', f'', f^{(3)}, \dots, f^{(n)}$ zvezna funkcije na I . (seveda če obstaja j -ti odvod, obstaja tudi zvezen $j - 1$ -ti odvod). ZDB je to množica funkcij, ki imajo vse odvode do n in so le-ti zvezni. ZDB to so vse n -krat zvezno odvedljive funkcije na intervalu I .

Označimo $C^\infty(I) := \bigcap_{n=1}^\infty C^n(I)$ – to so neskončnokrat odvedljive funkcije na intervalu I .

Opomba. Intuitivno¹¹ velja $C^1(I) \supset C^2(I) \supset C^3(I) \supset C^4(I) \supset \dots$.

Zgled. Nekaj primerov.

- Polimomi $\subset C^\infty(\mathbb{R})$.
- $f(x) = |x|^3$, $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & ; x \geq 0 \\ -3x^2 & ; x < 0 \end{cases} = 3x^2 \operatorname{sgn} x$, $f''(x) = \begin{cases} 6x & ; x \geq 0 \\ -6x & ; x < 0 \end{cases} = 6x \operatorname{sgn} x$, $f'''(x) = \begin{cases} 6 & ; x > 0 \\ -6 & ; x < 0 \end{cases} = 6 \operatorname{sgn} x$ in v 0 ni odvedljiva, zato $f \in C^2(\mathbb{R})$ a $f \notin C^3(\mathbb{R})$, ker $\exists f''$ in je zvezna na \mathbb{R} , a f''' sicer obstaja, a ni zvezna na \mathbb{R} . Velja pa $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Izrek. Rolle. Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ za $a, b \in \mathbb{R}$ zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b) .

$$f(a) = f(b) \implies \exists \alpha \in (a, b) \ni f'(\alpha) = 0$$

Dokaz. Sumimo, da je ustrezna α tista, ki je max ali min od f na I . Ker je f zvezna na $[a, b]$ (kompaktni množici), $\exists \alpha_1 \in [a, b], \alpha_2 \in [a, b] \ni f(\alpha_1) = \max f([a, b]) \wedge f(\alpha_2) = \min f([a, b])$.

Če je $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subseteq \{a, b\}$, je $f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$ in je v tem primeru f konstanta ($\exists! c \in \mathbb{R} \ni f(x) = c$), ki je odvedljiva in ima povsod odvod nič.

Sicer pa $\{\alpha_1, \alpha_2\} \not\subseteq \{a, b\}$. Tedaj ločimo dva primera: □

$\alpha_1 \in (a, b)$ To pomeni, da je globalni maksimum na odprtem intervalu. Trdimo, da je v lokalnem maksimumu odvod 0. Dokaz:

$$f'(\alpha_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha_1 + h) - f(\alpha_1)}{h}$$

Za a_1 (maksimum) velja $f(\alpha_1 + h) - f(\alpha_1) \leq 0$ (čim se pomaknemo izven točke, v kateri je maksimum, je funkcijska vrednost nižja). Potemtakem velja

$$\frac{f(\alpha_1 + h) - f(\alpha_1)}{h} \begin{cases} \leq 0 & ; h > 0 \\ \geq 0 & ; h < 0 \end{cases}$$

Ker je funkcija odvedljiva na odprtem intervalu, sta leva in desna limita enaki.

$$0 \geq \lim_{h \searrow 0} \frac{f(\alpha_1 + h) - f(\alpha_1)}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(\alpha_1 + h) - f(\alpha_1)}{h} \geq 0$$

Sledi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha_1 + h) - f(\alpha_1)}{h} = f'(x) = 0$$

$\alpha_2 \in (a, b)$ To pomeni, da je globalni minimum na odprtem intervalu. Trdimo, da je v lokalnem minimumu odvod 0. Dokaz je podoben tistemu za lokalni maksimum.

¹¹Baje. Jaz sem itak do vsega skeptičen.

Izrek. Lagrange. Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ za $a, b \in \mathbb{R}$ zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b) .

$$\exists \alpha \in (a, b) \ni f(b) - f(a) = f'(\alpha)(b - a) \sim \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\alpha)$$

ZDB na neki točki na grafu funkcije je tangenta na graf funkcije vzporedna premici, ki jo določata točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$.

Dokaz. Za dokaz Lagrangevega uporabimo Rolleov izrek. Splošen primer prevedemo na primer $h(a) = h(b)$ tako, da od naše splošne funkcije f odštejemo linearno funkcijo g , da bo veljalo $(f - g)(a) = (f - g)(b)$. Za funkcijo $g(x)$ mora veljati naslednje:

- $\exists k, n \in \mathbb{R} \ni f(x) = kx + n$
- $g(a) = 0$
- $g(b) = f(b) - f(a)$

Opazimo, da mora biti koeficient funkcije g enak $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, vertikalni odklon pa tolikšen, da ima funkcija g v a ničlo:

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a + n &= 0 \\ n &= -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}a \end{aligned}$$

Našli smo funkcijo $g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Funkcija $(f - g)$ sedaj ustreza pogojem za Rolleov izrek, torej $\exists \alpha \in [a, b] \ni (f - g)'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g'(\alpha) = f'(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, kar smo želeli dokazati. \square

Posledica. Naj bo $I \subseteq \mathbb{R}$ nenujno zaprt niti omejen in $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva na I . Tedaj je f Lipschitzova. Lipschitzove funkcije so enakomerno zvezne.

Dokaz. Po Lagrangeu velja $\forall x, y \in I \exists \alpha \in (x, y) \ni f(x) - f(y) = f'(\alpha)(x - y)$. Potemtakem $|f(x) - f(y)| = |f'(\alpha)||x - y| \leq \sup_{\beta \in (x, y)} |f'(\beta)||x - y|$. Torej $\exists M > 0 \forall x, y : |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$, enakomerno zveznost pa dobimo tako, da $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sup_{\beta \in I} |f'(\beta)|}$. Računajmo. Naj bo $M = \sup_{\beta \in I} |f'(\beta)|$, ki obstaja.

$$\begin{aligned} \forall x, y : |f(x) - f(y)| &\leq M|x - y| \\ \forall x, y : |x - y| < \frac{\varepsilon}{\sup_{\beta \in I} |f'(\beta)|} &\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < \sup_{\beta \in I} |f'(\beta)| \frac{\varepsilon}{\sup_{\beta \in I} |f'(\beta)|} < \varepsilon \\ \forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon) \forall x, y : |x - y| < \delta(\varepsilon) &\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \end{aligned}$$

\square

Opomba. Lipschitzovim funkcijam pravimo tudi Hölderjeve funkcije reda 1. f je Hölderjeva funkcija reda r , če velja $\exists M > 0 \forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^r$.

Trditev. Naj bo I odprti interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva. Tedaj:

- f narašča na $I \Leftrightarrow f' \geq 0$ na I
- f pada na $I \Leftrightarrow f' \leq 0$ na I
- f strogo narašča na $I \Leftrightarrow f' > 0$ na I . Protiprimer, da ni $\Leftrightarrow: f(x) = x^3$, ki strogo narašča, toda $f'(0) = 0$
- f strogo pada na $I \Leftrightarrow f' < 0$ na I . Protiprimer, da ni $\Leftrightarrow: f(x) = -x^3$, ki strogo pada, toda $f'(0) = 0$

Dokaz. Dokažimo le f narašča na $I \Leftrightarrow f' \geq 0$ na I . Drugo točko dokažemo podobno. Dokazujemo ekvivalenco:

(\Leftarrow) $f' \geq 0 \Rightarrow f$ narašča. Vzemimo poljubna $t_1 < t_2 \in I$. Po Lagrangeu $\exists \alpha \in (t_1, t_2) \ni f(t_2) - f(t_1) = f'(\alpha)(t_2 - t_1)$. Ker je po predpostavki $f'(\alpha) \geq 0$ in $t_2 - t_1 > 0$, je tudi $f(t_2) - f(t_1) \geq 0$ in zato $f(t_2) \geq f(t_1)$.

(\Rightarrow) f narašča $\Rightarrow f' \geq 0$. Velja $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Po predpostavki je $f(x+h) - f(x) \geq 0$, čim je $h > 0$, in $f(x+h) - f(x) \leq 0$, čim je $h < 0$. Torej je ulomek vedno nenegativen. \square

6.2 Konveksnost in konkavnost

Definicija. Naj bo $I \subseteq \mathbb{R}$ interval in $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. f je konveksna na I , če $\forall a, b \in I$ daljica $(a, f(a)), (b, f(b))$ leži nad grafom f .

Enačba premice, ki vsebuje to daljico, se glasi (razmislek je podoben kot pri Lagrangevem izreku)

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Za konveksno funkcijo torej velja $\forall a, b \in I : \forall x \in (a, b) : f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$ oziroma

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Vsak x na intervalu lahko zapišemo kot $x = a + t(b - a)$ za nek $t \in (0, 1)$. Tedaj je $x - a = t(b - a)$ in konveksnost se glasi

$$\forall a, b \in I : \forall t \in (0, 1) : f(a + t(b - a)) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}t(b - a) + f(a)$$

$$f(a + t(b - a)) = f(a + tb - ta) = f((1 - t)a + tb) \leq tf(b) - tf(a) + f(a) = (1 - t)f(a) + tf(b)$$

Konveksna kombinacija izrazov a, b je izraz oblike $(1 - t)a + tb$ za $t \in (0, 1)$. Potemtakem je ZDB definicija konveksnosti $\forall a, b \in I$: funkcijska vrednost konveksne kombinacije a, b je kvečjemu konveksna kombinacija funkcijskih vrednosti a, b .

Konkavnost pa je definirana tako, da povsod obrnemo predznake, torej daljica leži pod grafom f ZDB $\forall a, b \in I : f((1 - t)a + tb) \geq (1 - t)f(a) + tf(b)$.

Zgled. $f(x) = \sin x$, $I = [-\pi, 0]$. Je konveksna. Se vidi iz grafa. Preveriti analitično bi bilo težko.

Formulirajmo drugačen pogoj za konveksnost. Naj bo spet $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, kjer je I interval. f je konveksna

$$\Leftrightarrow \forall a, b \in I \forall x \in (a, b) : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Sedaj glejmo le poljuben a . Po prejšnjem pogoju moramo gledati še vse poljubne b , večje od a (ker le tako lahko konstruiramo interval). Za b in a mora biti diferenčni kvocient večji od diferenčnega kvocienta x in a za poljuben x . Ta pogoj pa je ekvivalenten temu, da diferenčni kvocient x in a s fiksnim a in čedalje večjim x narašča, torej je pogoj za konveksnost tudi:

$$\forall a \in I \forall x > a : g_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ je naraščajoča funkcija.}$$

Posledica. Naj bo f konveksna na odprtem intervalu I . $\forall a \in I$ obstajata funkciji

$$(D_+f)(a) = \lim_{x \searrow a} g_a(x) = \inf_{x \in I, x > a} g_a(x) \text{ (desni odvod } f \text{ v } a)$$

$$(D_-f)(a) = \lim_{x \nearrow a} g_a(x) = \sup_{x \in I, x < a} g_a(x) \text{ (levi odvod } f \text{ v } a)$$

in obe sta naraščajoči na I .

Dokaz. Obstoj sledi iz monotonosti $g_a(a)$, kajti $\lim_{x \searrow a} g_a(x) = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ in enako za levo limito. Diferenčni kvocient mora namreč biti naraščajoč. S tem smo dokazali, da je vsaka konveksna funkcija zvezna¹².

Naj bodo $x_1, x_2, x \in I \ni x_1 < x_2 < x$. Pomagaj si s skico¹³. Ker je f konveksna, sledi $g_x(x_1) \leq g_x(x_2)$. Ker $\forall s, t \in \mathbb{R} : g_s(t) = g_t(s)$, lahko našo neenakost zapišemo kot $g_{x_1}(x) \leq g_{x_2}(x)$. Sledi (desni neenačaj iz $g_{x_1}(x) \leq g_{x_2}(x)$, levi neenačaj pa ker g narašča):

$$(D_+(f))(x_1) = \inf_{x \in I, x > x_1} g_{x_1}(x) \leq \inf_{x \in I, x > x_2} g_{x_1}(x) \leq \inf_{x \in I, x > x_2} g_{x_2}(x) = (D_+(f))(x_2)$$

Podobno dokažemo¹⁴, da D_- narašča. □

¹²Ni pa vsaka konveksna funkcija odvedljiva, protiprimer je $f(x) = |x|$.

¹³TODO DORIŠI SKICO ZVZ VII/ANA1UČ/str. 13

¹⁴DOPIŠI KAKO! TODO XXX FIXME

Izrek. Naj bo $f : I^{odp.} \rightarrow \mathbb{R}$ dvakrat odvedljiva. Tedaj je f konveksna $\Leftrightarrow \forall x \in I : f''(x) \geq 0$ in f konkavna $\Leftrightarrow \forall x \in I : f''(x) \leq 0$.

Dokaz. Dokazujemo ekvivalenco za konveksnost (konkavnost podobno).

(\Rightarrow) Po predpostavki je f konveksna in dvakrat odvedljiva, torej je odvedljiva in sta levi in desni odvod enaka, po prejšnji posledici pa levi in desni odvod naraščata, torej f' narašča.

(\Leftarrow) Naj bo $f'' \geq 0$. Vzemimo $x, a \in I$. Po Lagrangeu $\exists \xi$ med x in a $\ni: f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a)$. Iz predpostavke $f'' > 0$ sledi, da f' narašča. Če je $x > \xi > a$, velja $f'(\xi) \geq f'(a)$, zato $f'(\xi)(x - a) \geq f'(a)(x - a)$. Če je $x < \xi < a$, velja $f'(\xi)(x - a) \leq f'(a)(x - a)$.

□

6.3 Ekstremi funkcij ene spremenljivke

Definicija. Naj bo $I \subseteq \mathbb{R}$ odprt interval, $a \in I$ in $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Pravimo, da ima f v točki a lokalni minimum, če $\exists \delta > 0 \ni: \min \{f(x); \forall x \in (a - \delta, a + \delta)\} = f(a)$. Pravimo, da ima f v točki a lokalni maksimum, če $\exists \delta > 0 \ni: \max \{f(x); \forall x \in (a - \delta, a + \delta)\} = f(a)$.

Izrek. Če je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva in ima v a lokalni minimum/maksimum, tedaj je $f'(a) = 0$.

Dokaz. Glej dokaz Rolleovega izreka.

□

Definicija. f ima v a ekstrem, če ima v a lokalni minimum ali lokalni maksimum.

Definicija. Če je $f'(a) = 0$, pravimo, da ima f v a stacionarno točko.

Izrek. Naj bo $I \subseteq \mathbb{R}$ odprt interval, $a \in I$ in $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dvakrat odvedljiva ter naj bo $f'(a) = 0$.

- $f''(a) > 0 \Rightarrow$ v a ima f lokalni minimum
- $f''(a) < 0 \Rightarrow$ v a ima f lokalni maksimum
- $f''(a) = 0 \Rightarrow$ nedoločeno

Dokaz. Sledi iz $f'' > 0 \Rightarrow$ stroga konveksnost in $f'' < 0 \Rightarrow$ stroga konkavnost.

□

6.4 L'Hopitalovo pravilo

Kako izračunati $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$?

Če so funkcije zvezne v a in $g(a) \neq 0$, velja $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$.

Če imata funkciji v a limito in $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, velja $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$.

Če $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ in je na neki okolici a $f(x)$ omejena, velja $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Če $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ in je na neki okolici a $g(x)$ navzdol omejena več od nič ali navzgor omejena manj od nič, velja $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Zanimivi primeri pa so, ko $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ali pa ko $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ in hkrati $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, na primer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x}$ ali pa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}$ ali pa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2}$. Tedaj uporabimo L'Hopitalovo pravilo.

Izrek. Če velja hkrati:

1. Eno izmed slednjega:

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ in hkrati $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$
- (c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ in hkrati $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$

2. f, g v okolici a odvedljivi

Potem $\exists L := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ in ta limita je enaka L .

Dokaz. Ne bomo dokazali. □

Zgled. Nekaj primerov uporabe L'Hopitalovega pravila.

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x}$$

Računajmo $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$ z L'Hopitalom. Potrebujemo ulomek. Ideja: množimo števec in imenovalc z x , tedaj bi dobili $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln x}{x}$. Toda v tem primeru števec in imenovalc ne ustrezata pogoju 1 za L'Hopitalovo pravilo.

Druga ideja: množimo števec in imenovalc z $(\ln x)^{-1}$, tedaj dobimo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(\ln x)^{-1}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{-1}{\log^2 x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} -x \log^2 x$, kar je precej komplicirano. Tretja ideja: množimo števec in imenovalc z x^{-1} , tedaj števec in imenovalc divergirata k $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-1}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$$

Potemtakem $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = e^0 = 1$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$. Obe strani ulomkove črte konvergirata k 0. Prav tako ko enkrat že uporabimo L'H.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

7 Taylorjev izrek in Taylorjeva formula

Naj bo f v okolici a dovoljkrat odvedljiva. Želimo aproksimirati $f(a+h)$ s polinomi danega reda n . Iščemo polinome reda n .

$n = 0$ konstante. $f(a+h) \approx f(a)$

$n = 1$ linearne funkcije. $f(a+h) \sim f(a) + f'(a)h$

$n = 2$... Želimo najti $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, odvisne le od f in a , za katere $f(a+h) \approx a_0 + a_1h + a_2h^2$. Ko govorimo o aproksimaciji, mislimo take koeficiente, da se približek najboljše prilaga dejanski funkcijski vrednosti, v smislu, da

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - (a_0 + a_1h + a_2h^2)}{h^2} = 0$$

a_0 izvemo takoj, kajti $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - (a_0 + a_1h + a_2h^2) = 0 = f(a) - (a_0 + 0h + 0h^2) = f(a) - a_0 = 0$, torej $a_0 = f(a)$. Za preostale koeficiente uporabimo L'Hopitalovo pravilo, ki pove, da zadošča, da je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - (0 + a_1 + 2a_2h)}{2h} = 0$$

Zopet glejmo števec in vstavimo $h = 0$: $f'(a) - a_1 = 0 \Rightarrow f'(a) = a_1$. Spet uporabimo L'H:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(a+h) - (0 + 0 + 2a_2)}{2} = 0$$

Vstavimo $h = 0$ v $f''(a+h) - 2a_2$ in dobimo $2a_2 = f''(a)$, torej $a_2 = \frac{f''(a)}{2}$.

$n = 3$ Ugibamo, da je najboljši kubični približek

$$f(a+h) \approx h \mapsto f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{6}h^3$$

Izrek. Taylor. Naj bo $n \in \mathbb{N}$, I interval $\subseteq \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n -krat odvedljiva v točki a . Tedaj $\exists g_n : I - a \rightarrow \mathbb{R}$ \ni :¹⁵

- $f(a+h) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + g_n(h) h^n$ in

¹⁵ $I - a$ pomeni interval I pomaknjen v levo za a .

- $\lim_{h \rightarrow 0} g_n(h) = 0$

Sedaj pišimo $x = a + h$. Tedaj se izrek glasi: $\exists \tilde{g}_n : I \rightarrow \mathbb{R} \ni$:

- $f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j + \tilde{g}_n(x) (x-a)^n$
- $\lim_{x \rightarrow a} \tilde{g}_n(x) = 0$

Tedaj označimo $T_{n,f,a}(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j$ (pravimo n -ti Taylorjev polinom za f okrog točke a) in $R_{n,f,a}(x) = \tilde{g}_n(x) (x-a)^n$ (pravimo ostanek/napaka).

Izrek. Če je f $(n+1)$ -krat odvedljiva na odprtem intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, $a \in I$, tedaj $\forall b \in I \exists \alpha \in I$ med a in $x \ni$: $R_n(b) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$.

Dokaz. Označimo $T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ torej n -ti Taylorjev polinom in naj bo K tako število, da velja $f(b) - T_n(b) = K(b-a)^{n+1}$. Definirajmo $F(x) = f(x) - T_n(x) - K(x-a)^{n+1}$.

Velja $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ za $k \leq n$, kajti $\frac{d}{dh} \sum_{j=1}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (h)^j = \sum_{j=1}^n \frac{f^{(j)}(a)}{(j-1)!} h^{j-1} = f^{(j)}(a)$. Vsi členi z eksponentom, manjšim od k , se odvajajo v 0, točno pri eksponentu k se člen odvaja v konstanto, pri višjih členih pa ostane potencirana spremenljivka, ki je 0 (tu mislimo odstopanje od a , označeno s h), torej se ti členi tudi izničijo.

Zato $\forall k \leq n : F^{(k)}(a) = 0$. Nadalje velja $F(a) = F(b) = 0$, ker smo pač tako definirali funkcijo F , zato obstaja po Rolleovem izreku tak α_1 , da velja $F'(\alpha_1) = 0$. Po Rolleovem izreku nadalje obstaja tak α_2 med a in α_1 , da velja $F''(\alpha_2) = 0$. Spet po Rolleovem izreku obstaja tak α_3 med a in α_2 , da velja $F'''(\alpha_3) = 0$. Postopek lahko ponavljamo in dobimo tak $\alpha = \alpha_{n+1}$, da velja $F^{(n+1)}(\alpha) = 0$.

Ker je $\forall x \in I : T_n^{(n+1)}(x) = 0$ (očitno, isti argument kot v drugem odstavku dokaza), to pomeni $f^{(n+1)}(\alpha) = (K(x-a)^{n+1})^{(n+1)} = K(n+1)!$. Torej je $K = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}$ in zato $f(b) = T_n(b) + \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$. \square

Posledica. Če je $(n+1)$ -ti odvod omejen na I , t. j. $\exists M > 0 \forall x \in I : |f^{(n+1)}(x)| \leq M$, lahko ostanek eksplicitno ocenimo, in sicer $|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$.

Kaj pa se zgodi, ko n pošljemo v neskončnost? Iskali bi aproksimacije s „polinomi neskončnega reda“.

Definicija. Če je $f \in C^\infty$ v okolici točke $a \in \mathbb{R}$. Tedaj definiramo Taylorjevo vrsto f v okolici točke a : $T_{f,a}(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j$.

Vprašanje. Ali Taylorjeva vrsta konvergira oziroma kje konvergira? Kakšna je zveza s $f(x)$? Kakšen je $R_{f,a}$?

Oglejmo si potenčne vrste $(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j)$ kot poseben primer funkcijskih vrst $(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j)$. Vemo, da ima potenčna vrsta konvergenčni radij R . Za $x \in (-R, R)$ konvergira, za $x \in [-R, R]^C$ divergira.

Izrek. Naj ima potenčna vrsta $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ konvergenčni radij R . Tedaj ima tudi $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k x^{k-1}$ konvergenčni radij R .

Dokaz.

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_g} &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|k a_k|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|k| |a_k|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|k|} \sqrt[k]{|a_k|} = \dots \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|k|} &= \lim_{k \rightarrow \infty} k^{1/k} = e^{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln k} \stackrel{\text{L'H}}{=} e^{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}} = e^{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2}} = e^0 = 1 \\ \dots &= \limsup_{k \rightarrow \infty} 1 \cdot \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R_f} \end{aligned}$$

\square

Posledica. Če ima potenčna vrsta f konvergenčni radij $R > 0$, tedaj je $f \in C^\infty((-R, R))$ in velja $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, potem velja $g = f'$ (iz izreka zgoraj). Razlaga:

- $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

- $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k f^{(k)}(0)}{k!} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!} x^{k-1}$ (k začne z 1, ker se $k = 0$ člen odvaža v konstanto 0)
- $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k f^{(k)}(0)}{k!} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!} x^{k-1} = f'(x)$

Definicija. Funkcija $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ (J je interval $\subseteq \mathbb{R}$) je realno analitična, če se jo da okoli vsake točke $c \in J$ razviti v potenčno vrsto, torej če $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$ za x blizu c .

Trditev. $f \in C^{\infty} \Rightarrow f$ je realno analitična. Protiprimer je $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$.¹⁶

Zgled. Primeri Taylorjevih vrst.

1. $f(x) = e^x$. n -ti taylorjev polinom za $f(x)$ okoli 0: $T_{n,e^x,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ in velja $e^x = T_{n,e^x,0}(x) + R_{n,e^x,0}(x)$, kjer $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,e^x,0}(x) = 0$. Ne bomo dokazali. Sledi $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Opazimo sode eksponente in opazimo učinek odvajanja: $\cos, -\sin, -\cos, \sin, \cos, -\sin, \dots$. Členi vrste $\sin x$ v $x = 0$ so: $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$. Opazimo izpadanje vsakega drugega člena.
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$. Opazimo sode eksponente.
4. $f(x) = \log(1-x)$. A lahko to funkcijo razvijemo v taylorjevo vrsto okoli točke 0?

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(0)$
0	$\log(1-x)$	0
1	$-\frac{1}{1-x}$	-1
2	$-\frac{1}{(1-x)^2}$	-1
3	$-\frac{2}{(1-x)^3}$	-2
...
n	$-\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$	$-(n-1)!$

Tabela 1: Razvijanje $\log(1-x)$ okoli točke 0.

Velja $f(x) = \log(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-(k-1)!}{k!} x^k = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ za $|x| < 1$.

8 Integrali

Radi bi definirali ploščino $P = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; x \in [a, b], t \in [0, f(x)]\}$ za funkcijo $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$.¹⁷ P aproksimiramo s pravokotniki, katerih ploščino smo predhodno definirali takole:

Definicija. Ploščina pravokotnika s stranicama c in d je $c \cdot d$.

Najprej diskusija. Naj bo t_j delitev $[a, b]$, torej $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Ne zahtevamo ekvidistančne delitve, torej take, pri kateri bi bile razdalje enake. Kako naj definiramo višine pravokotnikov, katerih stranice so delilne točke t_n ?

Lahko tako, da na vsakem intervalu $[t_i, t_{i+1}]$ izberemo nek ξ_i , pravokotnicova osnovnica bode $t_{i+1} - t_i$, njegova višina pa $f(\xi_i)$. Ploščina P pod grafom funkcije je približno enaka vsoti ploščin teh pravokotnikov, torej $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) (t_k - t_{k-1}) = R(f, \vec{t}, \vec{\xi})$, kjer je \vec{t} delitev in $\vec{\xi}$ izbira točk na intervalih delitve. Temu pravimo Riemannova vsota za f , ki pripada delitvi \vec{t} in izboru $\vec{\xi}$.

Če je $D := \{[t_{j+1}, t_j]; j = \{1..n\}\}$ delitev za $[a, b]$, definiramo tako oznako $|D|_{\infty} := \max_{j=\{1..n\}} (t_j - t_{j-1}) = \max_{J \in D} (|J|)$.

Če $\exists A \in \mathbb{R} \ni$: za poljubno fine delitve ($|D|_{\infty} = \infty^{-1}$) D se pripadajoče Riemannove vsote malo razlikujejo od A , pravimo številu A ploščina lika P .

Sedaj pa še formalna definicija.

¹⁶TODO XXX FIXME ZAKAJ?, ne razumem

¹⁷TODO XXX FIXME skica ANA1P FMF 2024-01-09/str.3

Definicija. Naj bodo f, D, ξ kot prej in $I \in \mathbb{R}$ realno število. Če $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni$:

- \forall delitev $D \ni: |D|_\infty < \delta$
- \forall nabor $\xi = \xi_1, \dots, \xi_n$, pripadajoč delitvi D

velja $|R(f, D, \xi) - I| < \varepsilon \implies I$ je določen integral f na intervalu $[a, b]$ in je po definiciji ploščina lika P .

Če tak I obstaja, kar ni *a priori*, pravimo, da je f integrabilna na $[a, b]$ in pišemo $I = \int_a^b f(x) dx$. Temu pravimo Riemannov integral funkcije f na $[a, b]$.

Definicija. Darbouxove vsote. Imamo torej delitev $D = \{[t_{j-1}, t_j]; j \in \{1..n\}; t_0 = 1, t_n = b\}$ delitev za $J = [a, b]$ in $f: J \rightarrow \mathbb{R}$. Imamo tudi množico izbranih točk $\xi = \{\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]; j \in \{1..n\}\}$ in $R(f, D, \xi) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(t_j - t_{j-1})$.

Ocenimo $f(\xi_j): \inf_{x \in [t_{j-1}, t_j]} f(x) \leq f(\xi_j) \leq \sup_{x \in [t_{j-1}, t_j]} f(x)$. Definirali smo $\int_a^b f(x) dx$ kot limito Riemannovih vsot s kakršnokoli delitvijo in izbiro ξ , zato lahko pišemo $\forall j \in \{1..n\}: \inf_{x \in [t_{j-1}, t_j]} f(x) = f(\xi_j) = \sup_{x \in [t_{j-1}, t_j]} f(x)$. Zato lahko limito Riemannovih vsot obravnavamo neodvisno od ξ :

$$s(f, D) := \sum_{j=1}^n \left(\inf_{x \in D_j} f(x) \right) (t_j - t_{j-1}) \leq R(f, D, \xi) \leq \sum_{j=1}^n \left(\sup_{x \in D_j} f(x) \right) (t_j - t_{j-1}) =: S(f, D)$$

Definirali smo dva nova pojma, spodnjo Darbouxovo vsoto $s(f, D)$ in zgornjo Darbouxovo vsoto $S(f, D)$ in velja $s(f, D) \leq R(f, D, \xi) \leq S(f, D)$.

Definicija. Naj bosta D in D' delitvi za interval J . Pravimo, da je D' finejša od D , če je ima D' vse delilne točke, ki jih ima D in poleg njih še vsaj kakšno. Označimo $D \subset D'$.

Izrek. Naj bo $D \subset D'$ (D' finejša od D). Oglejmo si $s(f, D)$ in $s(f, D')$. Tedaj velja $s(f, D) \leq s(f, D')$, ker je infimum po manjši množici lahko le večji — s finejšo delitvijo smo vsaj neko množico (delitveni interval) razdelili na dva dela. Za zgornjo Darbouxovo vsoto velja obratno, torej $S(f, D) \geq S(f, D')$.

Izrek. Za poljubni različni delitvi D_1, D_2 intervala J velja $s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$ ZDB Katerakoli spodnja Darbouxova vsota je kvečjemu tolikšna kot katerakoli zgornja.

Dokaz. Označimo z $D_1 \cup D_2$ delitev, ki vsebuje vse delilne točke tako D_1 kot tudi D_2 . Očitno velja, da sta $D_1 \subset D_1 \cup D_2$ in $D_2 \subset D_1 \cup D_2$. Po prejšnjem izreku veljata leva in desna neenakost, srednja pa iz definicije (očitno).

$$s(f, D_1) \leq s(f, D_1 \cup D_2) \leq S(f, D_1 \cup D_2) \leq S(f, D_2)$$

□

Definicija. Naj bo $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ omejena. Označimo $s(f) := \sup_{\text{vse možne delitve } D} s(f, D)$ in $S(f) := \inf_{\text{vse možne delitve } D} S(f, D)$. Funkcija $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ je Riemannovo integrabilna, če $s(f) = S(f)$ oziroma če $\forall \varepsilon > 0 \exists$ delitev D na $J \ni: S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$.

Opomba. Integrabilnost f ne pomeni, da $\exists D \ni: s(f, D) = S(f, D)$. Ni namreč nujno, da množica vsebuje svoj supremum. Primer: za $f(x) = x$ velja $\forall D: S(f, D) > s(f, D)$.

Izrek. Vsaka zvezna funkcija je integrabilna na J .

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Po definiciji $S(f, D) - s(f, D) = \sum_{j=1}^n \left(\sup_{x \in D_j} f(x) - \inf_{x \in D_j} f(x) \right) (t_j - t_{j-1})$. Ker je f zvezna, je na zaprtem $J = [a, b]$ enakomerno zvezna, torej $\exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in J: |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Izberimo tako delitev D , da je $\forall j \in \{1..|D|\}: t_j - t_{j-1} < \delta$. Tedaj bo veljalo $\sum_{j=1}^n \left(\sup_{x \in D_j} f(x) - \inf_{x \in D_j} f(x) \right) (t_j - t_{j-1}) < \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} (t_j - t_{j-1}) = \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} = \varepsilon$.

Skratka dokazali smo $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$ za poljuben ε , torej je funkcija Riemannovo integrabilna po zgornji definiciji. □

Definicija. $A \subset \mathbb{R}$ ima mero 0, če $\forall \varepsilon > 0 \exists$ družina intervalov $I_j \ni: A \subset \bigcup I_j \wedge \sum |I_j| < \varepsilon$. Primer: vse števne in končne množice.

Izrek. Funkcija f je integrabilna na intervalu $J \iff \{x \in J; f \text{ ni zvezna v } x\}$ ima mero 0. ZDB če ima množica točk z definicijskega območja f , v katerih f ni zvezna, mero 0 (recimo če je teh točk končno mnogo), je f integrabilna.

Dejstvo. Označimo z $I(J)$ množico vseh integrabilnih funkcij na intervalu J . $I(J)$ je vektorski prostor za množenje s skalarji iz \mathbb{R} . Naj bodo $f, g \in I(J)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Velja aditivnost $f(x) + g(x) \in I(J)$, kajti $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ in homogenost $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$.

Izrek. Če je f integrabilna na $J = [a, b]$ in je $c \in J$, tedaj je f integrabilna na $[a, c]$ in $[c, b]$ in velja $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Izrek. Če sta f, g na J integrabilni funkciji in če je $\forall x \in J : f(x) \leq g(x)$, tedaj $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$. Posledično velja ob isti predpostavki $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Definicija. Če je f integrabilna na $J = [a, b]$, definiramo povprečje f na J s predpisom

$$\langle f \rangle_J := \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \in \mathbb{R}.$$

Izrek. Velja $\inf_{x \in J} f(x) \leq \langle f \rangle_J \leq \sup_{x \in J} f(x)$. Če je $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna, $\exists \xi \in J \ni f(\xi) = \langle f \rangle_J$ (izrek o vmesni vrednosti).

Definicija. Naj bo $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ dana funkcija. Nedoločeni integral f je takšna funkcija F , če obstaja, $\ni F' = f \sim \forall x \in J : F'(x) = f(x)$. Pišemo tudi Pf ali $\mathbb{P}f$ in pravimo, da je $F = Pf$ primitivna funkcija za f . Velja $P(f + g) = Pf + Pg$ (aditivnost odvoda) in $P(\lambda f) = \lambda Pf$ (homogenost odvoda).

Nedoločeni integral je na intervalu določen do aditivne konstante natančno. Če je $F_1' = f = F_2'$ na intervalu J oziroma če na J velja $(F_1 - F_2)' = 0$, potem $F_1 - F_2 = c$ oziroma $F_1 = F_2 + c$ za neko konstanto $c \in \mathbb{R}$.

Označimo $F(x) = Pf(x) = \int f(x) dx$.

Izrek. Integracija po delih \sim per partes. Velja $\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$.

Dokaz. Izhaja iz odvoda produkta $(fg)' = f'g + fg'$. □

Trditev. Naj bo f integrabilna na J . Definirajmo $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Velja $|F(x_1) - F(x_2)| =$

$$= \left| \int_a^{x_1} f(t) dt - \int_a^{x_2} f(t) dt \right| = \left| \int_a^{x_1} f(t) dt + \int_{x_2}^a f(t) dt \right| = \left| \int_{x_2}^{x_1} f(t) dt \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt$$

Izrek. Osnovni izrek analize/fundamental theorem of calculus. Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Tedaj je F odvedljiva na J in velja $F'(x) = f(x)$.

Dokaz.

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt \quad / : h$$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} = \langle f \rangle_{[x, x+h]}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \langle f \rangle_{x, x+h} = f(x).$$

□

Posledica. Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in $G = Pf$ ($G' = f$). Tedaj je $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$.

Dokaz. Naj bo $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Ker je $F' = f = G'$, je $(F - G)' = 0 \Rightarrow F - G = c \in \mathbb{R}$, torej $G(x) = F(x) + c$, sledi $G(a) = F(a) + c = 0$ po definiciji F , torej je $G(a) = c$. Sledi $F(x) = G(x) - G(a)$ in $F(b) = G(b) - G(a)$ in zato $F(b) = \int_a^b f(t) dt$. □

8.1 Iskanje primitivne funkcije

- Uganemo jo
- $P(x^n) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
- $P(e^x) = e^x$
- $P(\sin x) = -\cos x$
- $P(\ln x) = x(\ln x - 1)$

Izrek. *Substitucija/uvredba nove spremenljivke*¹⁸. Naj bo $F(x)$ nedoločeni integral funkcije $f(x)$ ter $\phi(x)$ odvedljiva funkcija. Potem velja

$$F(\phi(t)) = \int f(\phi(t))\phi'(t) dx$$

Dokaz. Formula je posledica odvoda kompozituma:

$$(F(\phi(t)))' = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$$

integrirajmo levo in desno stran:

$$\int (F(\phi(t)))' dt = \int f(\phi(t))\phi'(t) dt.$$

□

8.2 Izlimitirani integrali

Doslej smo računali določene integrale omejene funkcije na omejenem intervalu, torej $\int_a^b f(x) dx$. Kaj pa neomejen interval, torej $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$?

Definicija. Naj bo $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ in naj bo $\forall m > a : f$ integrabilna na $[a, -m]$. Če $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^m f(x) dx$, pravimo, da integral $\int_a^\infty f(x) dx$ konvergira, sicer pa divergira. Označimo $\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^m f(x) dx$. Podobno definiramo $\int_{-\infty}^a f(x) dx$.

Zgled. Pomemben primer. $\int_1^\infty x^\alpha dx = ?$. $\int_1^M x^\alpha dx = \frac{M^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} = \frac{M^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}$. Torej $\exists \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M x^\alpha dx \Leftrightarrow \alpha \neq -1$. Poglejmo, kaj se zgodi v $\alpha = -1$: $\int_1^\infty x^{-1} dx = \ln M - \ln 1 = \ln M$. Toda $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln M = \infty$, torej $\int_1^\infty x^{-1} dx$ divergira.

Definicija. $\int_a^\infty f(x) dx$ je absolutno konvergenten, če je $\int_a^\infty |f(x)| dx < \infty$.

Dejstvo. Velja $\int_a^\infty |f(x)| dx < \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx < \infty$. Velja $|\int_a^\infty f(x) dx| \leq \int_a^\infty |f(x)| dx$.

Ali je predpostavka, da je f omejena, sploh potrebna?

Definicija. Naj bo $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R} \ni \forall c < b : f$ integrabilna na $[a, c]$. V točki b je f lahko neomejena. Če \exists končna limita $\lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x) dx$, je integral $\int_a^b f(x) dx$ konvergenten, sicer je divergenten. Podobno definiramo, če je funkcija definirana na intervalu $(a, b]$.

Zgled. $\int_0^1 x^\alpha dx$. Za $\alpha < 0$ ima graf x^α v $x = 0$ pol. Računajmo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 x^\alpha dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - \varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{(\alpha+1)\ln \varepsilon}}{\alpha+1}$$

Pridobimo pogoj $\alpha \neq -1$ (imenovalec) in $\alpha + 1 > 0$ (da bo $(\alpha + 1) \ln \varepsilon \rightarrow -\infty$), torej skupaj s predpostavko $\alpha \in (-1, 0)$.

Torej $\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}$ za $\alpha \in (-1, 0)$.

¹⁸ne razumem. mogoče bom v naslednjem življenju.

8.3 Uporaba integrala

- Ploščine: $f \geq 0$ na $J = [a, b]$ in je $f \in I(J)$, je ploščina lika med x osjo in grafom f definirana kot $\int_a^b f(x) dx$. Če f ni pozitivna, pa je $\int_a^b f(x) dx = pl(L_1) - pl(L_2)$, kjer je L_1 lik nad x osjo in L_2 lik pod x osjo.

Zgled. Ploščina kroga: Enačba krožnice je $x^2 + y^2 = r^2$ za $r > 0$. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Ploščina kroga z radijem r je torej $2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \dots = \pi r^2$.